MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA

Módulo 2

Unidades 17 e 18

Unidade 17

<pág. 97>

Função do 2° grau
Para início de conversa...

Imagine você sentado em um ônibus, indo para a escola, jogando uma caneta para cima e pegando de volta na mão.

Embora para você a caneta só vá para cima e

para baixo, quem está de fora do ônibus consegue ver a caneta fazer um movimento de parábola, com concavidade para baixo. Nessa situação, temos dois movimentos distintos, pois, além de a caneta ir para cima, o ônibus movimenta-se para frente. Esse exemplo simples mostra como as funções do 2º grau fazem parte do nosso cotidiano e muitas vezes nem percebemos.

Elas possuem várias aplicações no dia a dia, principalmente em situações relacionadas à Física,

envolvendo lançamento oblíquo, movimento uniformemente variado etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas, entre outros.

Nessa unidade continuaremos estudando as funções polinomiais do 2° grau (estudo iniciado na unidade anterior a esta), mas agora trabalharemos com os conceitos de zeros ou raízes, máximo e mínimo de uma função do 2° grau, construiremos seus gráficos e analisaremos suas aplicações.

<pág. 98>

Objetivos de aprendizagem

.Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2° grau;

.Conceituar função polinomial do 2° grau;

.Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau;

.Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau;

.Construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2° grau;

.Identificar a concavidade e outros elementos da parábola;

.Identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2° grau;

.Resolver problemas de máximos e mínimos associados a função polinomial do 2° grau;

.Compreender os significados dos coeficientes da função do 2° grau;

.Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas.

<pág. 99>

Seção 1
Entendendo as parábolas

A parábola é o gráfico da função polinomial do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$. Isso significa que a união de todos os pontos $(x , f(x))$ formam uma figura chamada de parábola, o que vale para toda função do 2° grau. Os elementos principais de uma parábola são a concavidade, os pontos onde cortam os eixos coordenados e o vértice. Convidamos você a identificar esses elementos em uma representação gráfica.

Veja a figura a seguir:

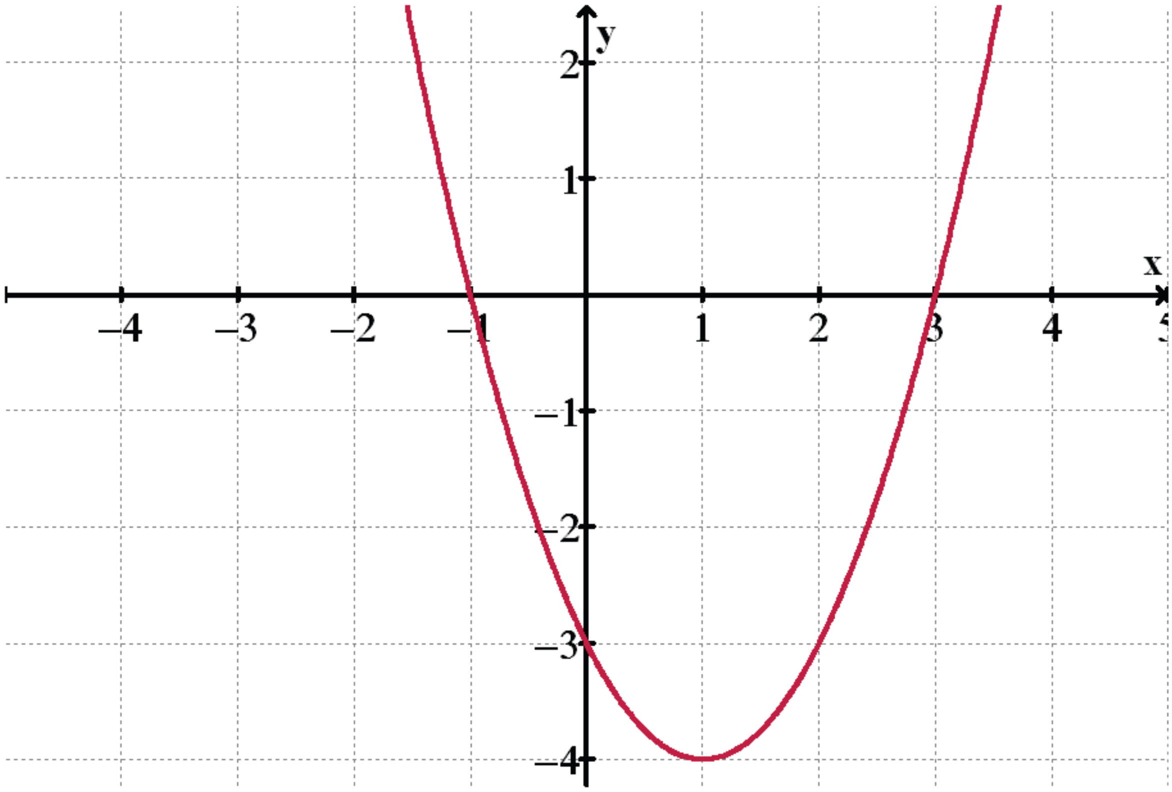


Figura 1: Gráfico de uma função do 2° grau: Parábola.

Os pontos (−1, 0) e (3,0) são os pontos de interseção com o eixo x. O ponto (0, −3) é o ponto de interseção com o eixo y. E o ponto (1, −

4) é chamado vértice da parábola. O vértice é o ponto em que a parábola começa a mudar sua direção. Note que até x = 1 a função é decrescente e após x = 1 esta passa a ser crescente. A concavidade desta parábola está voltada para cima. Neste caso, dizemos que a parábola tem um ponto de mínimo (vértice), pois nenhum outro ponto da parábola possui um valor para a ordenada (coordenada y do ponto) menor que −4.

Como você pode ver, podemos retirar muitas informações de um gráfico

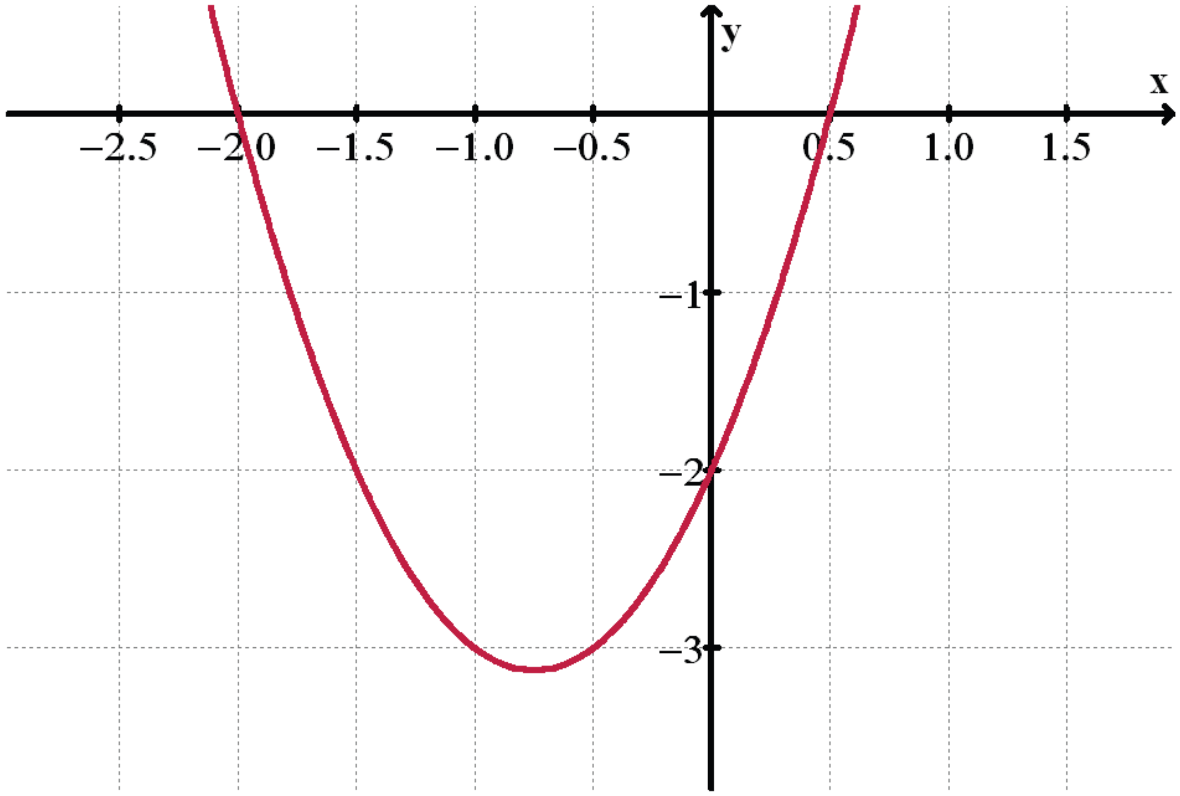
que representa uma função quadrática (ou função do 2º grau), não é verdade?

Vamos começar falando a respeito da concavidade. Ela ora está voltada para cima, ora está voltada para baixo. Mas o que determina a orientação dessa concavidade?

<pág. 100>

A concavidade da parábola

A concavidade da parábola será voltada para cima, se o valor do coeficiente *a* for positivo e será voltada para baixo, se o valor de *a* for negativo.

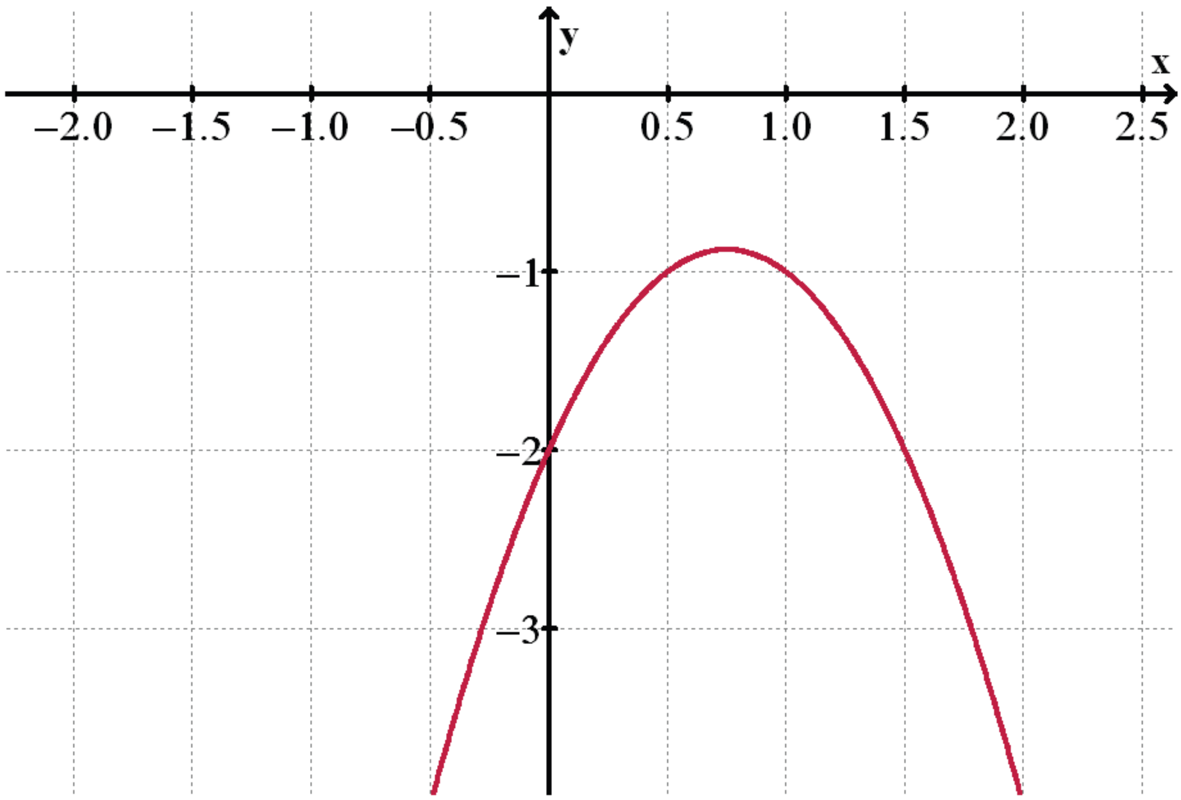


Exemplo 1: $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

Como o valor do coeficiente *a* é positivo (*a* = 2), a concavidade da parábola está voltada para cima. Podemos concluir também que a parábola possui um valor mínimo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a

concavidade da parábola está voltada para cima (a>0).

Exemplo 2: $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$



<pág. 101>

Como o valor do coeficiente *a* é negativo (*a* = −2), a concavidade da parábola está voltada para

baixo. Podemos concluir também que a parábola possui um valor máximo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para baixo ($a < 0$).

Atividade 4

Determine se as funções a seguir possuem gráficos cujas concavidades estão voltadas para baixo ou para cima e determine se possui um valor máximo ou mínimo.

a. $f(x) = x^2 + 3x + 6$

b. $g(x) = - x^2 + 5x$

c. $h(x) = 1,3x - 2x^2$

d. $m(x) = -5 + 0,2x^2$

e. $n(x) = 2 + x^2 - 3x$

******

Pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados

Podemos destacar, em uma parábola, pontos notáveis, com os quais poderemos construir com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática. Eles se dividem em:

a. Ponto(s) de interseção da parábola com o eixo das abscissas;

b. Ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas;

c. Vértice da parábola.

Zeros (ou raízes) de uma função e o eixo das abscissas.

Os zeros ou raízes de uma função são os valores de x tais que f(x) = 0, isto é, são os valores de x cuja imagem é igual a zero. Graficamente, isso significa que são os valores das coordenadas x dos pontos de interseção da parábola com o eixo x (lembre-se de que todos os pontos que pertencem ao eixo x têm ordenada igual a zero, ou seja, y = 0). Para ajudá-lo a identificar as raízes de uma

função do 2º grau, desenvolvemos três bons exemplos. Eles mostram que

<pág. 102>

uma função do 2º grau pode ter duas raízes reais, apenas 1 raiz real ou até mesmo há casos em que ela não possui nenhuma raiz real. Ao fazermos f(x) = 0, recaímos em uma equação do 2° grau que, como vimos na unidade anterior, pode ser resolvida, dentre outras formas, utilizando a fórmula conhecida como “Fórmula de Bhaskara”. Vejamos essas possibilidades.

Saiba Mais

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do segundo grau estabeleceu-se no Brasil, por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

.Problemas que recaem em uma equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos, o que se tinha era uma receita (escrita, sem uso de

símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos. .*Bhaskara* nasceu na Índia, em 1114, e viveu até cerca de 1185. Foi um dos mais importantes ma-temáticos do século XII. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receita sem prosa),

progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros. .Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito com François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara*, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º

grau. Fonte: *Revista do Professor de Matemática* (RPM), 39, p. 54.

****

Exemplo 1: $f(x) = x2 - 3x + 2$

Vamos identificar os coeficientes *a*, *b* e *c* de *f* : $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Dessa forma, temos que:

i. O gráfico de *f* é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente *a* é positivo);

ii. Um ponto sobre o eixo *y* tem coordenada $x = 0$. Dessa forma, o ponto de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *y* é $(0, f(0))$. No exemplo apresentado, o

gráfico intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas (0,2);

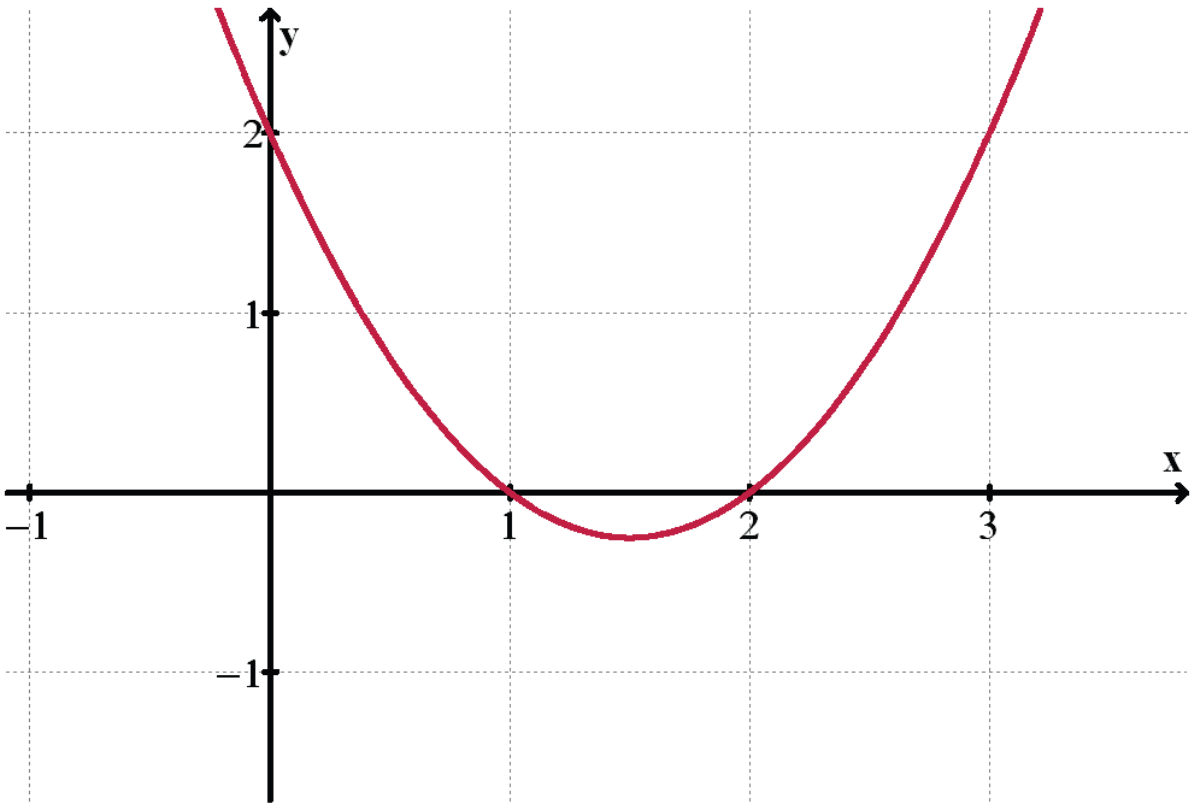
iii. As raízes de *f* são obtidas resolvendo-se a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara teremos que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$, e $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$, donde teremos que $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.

O gráfico de f é mostrado a seguir. Observe nele as informações que acabamos de obter através da lei da

função.

<pág. 103>



Exemplo 2: $g(x) = -\ x2 + 2x - 1$

Procedendo da mesma forma como no exemplo 1, temos:

i. Os coeficientes dessa função são $a = -1$, $b = 2$ e $c = -\ 1$. Assim, o gráfico

de *g* é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente *a* é negativo);

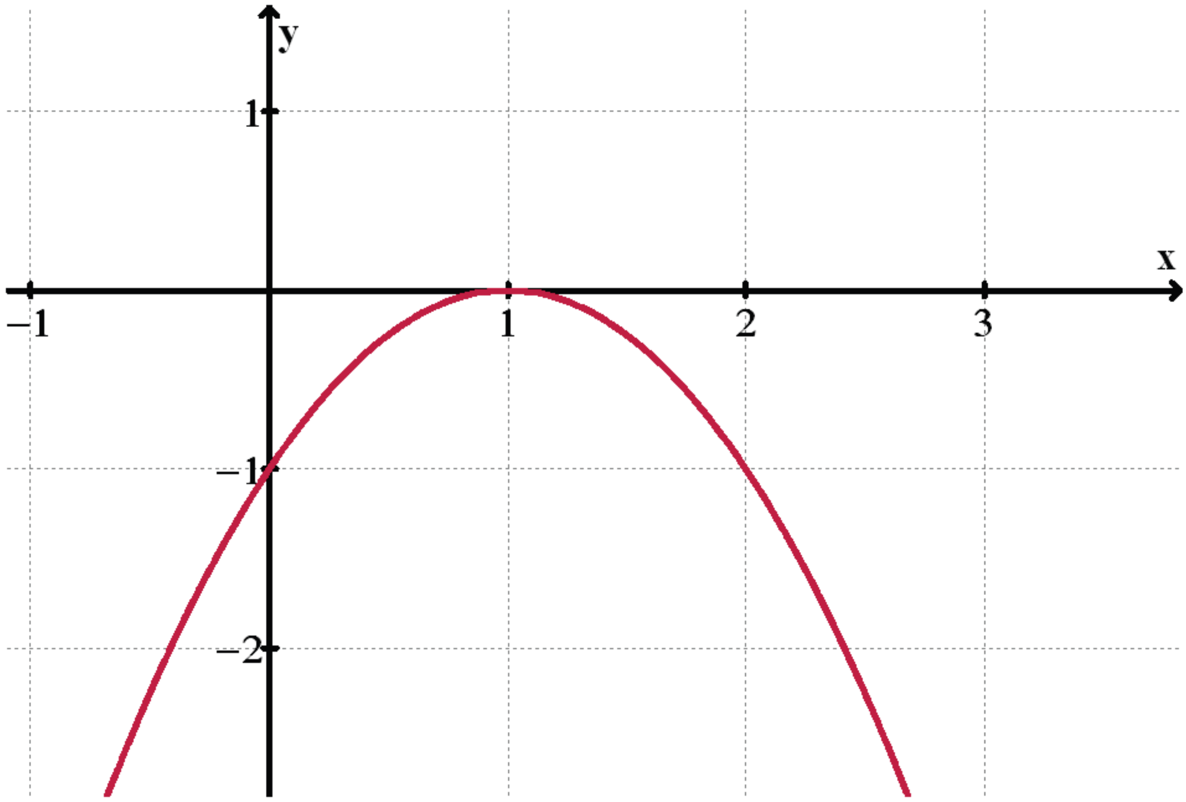
i. O gráfico de *g* corta o eixo *y* no ponto de coordenadas (0, –1);

i. Resolvendo-se a equação $-x^2 + 2x - 1=0$, temos que

$\Delta = 2^2 - 4. (-1). (-1) = 4 - 4$ e x = $= \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 . (-1)}$.

Como Δ = 0, *g* possui uma única raiz real (x = 1). Veja o gráfico de *g* a seguir. Note que a parábola tangencia o eixo

x apenas no ponto cuja abscissa é 1.



<pág. 104>

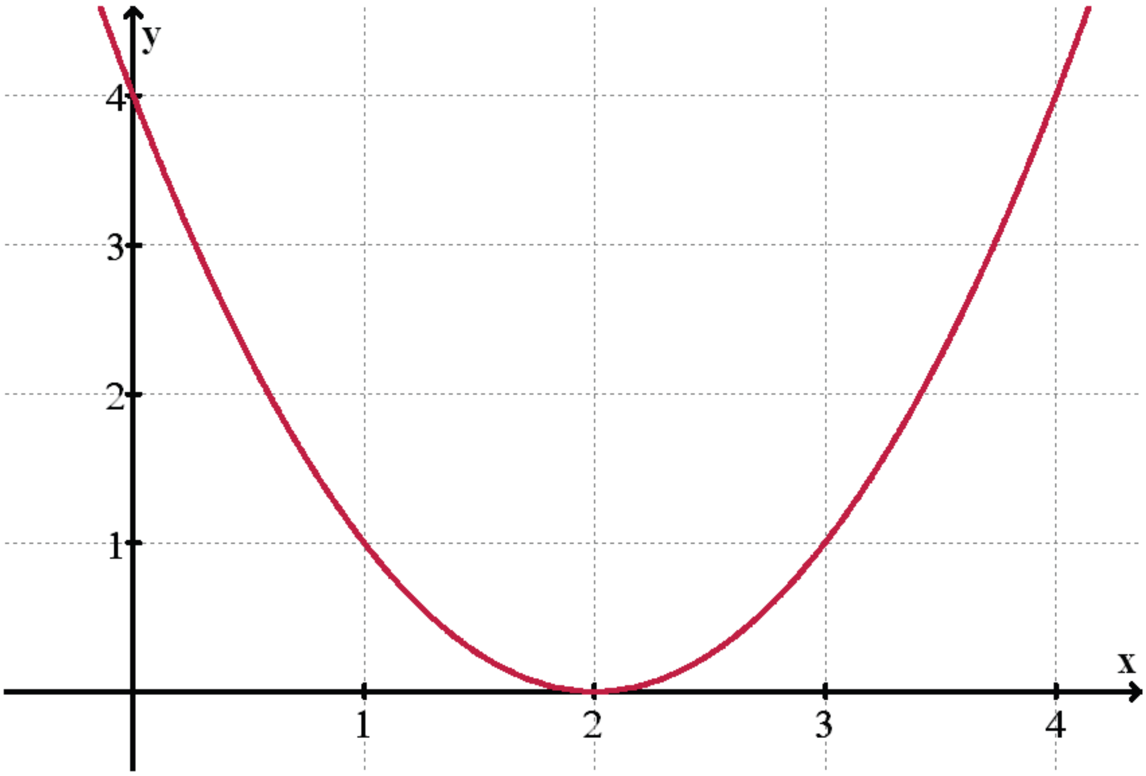
Exemplo 3: *h*(*x*) = *x*2 – 2*x* + 2

Nesse caso, o gráfico de *h* é uma parábola com concavidade voltada para cima e passa pelo ponto

(0,2). Contudo, ao resolvermos a equação *x*2 – 2*x* + 2=0 para encontrarmos as raízes de *h*, temos que

$\Delta = (-2)^2 - 4 . 1 . 2 = 4 - 8 = -4$.

Como 0 < Δ, as raízes obtidas pela Fórmula de Bhaskara não são números reais. Neste caso, o gráfico da função *h* não intersecta o eixo *x*. Veja a representação gráfica de *h* a seguir.

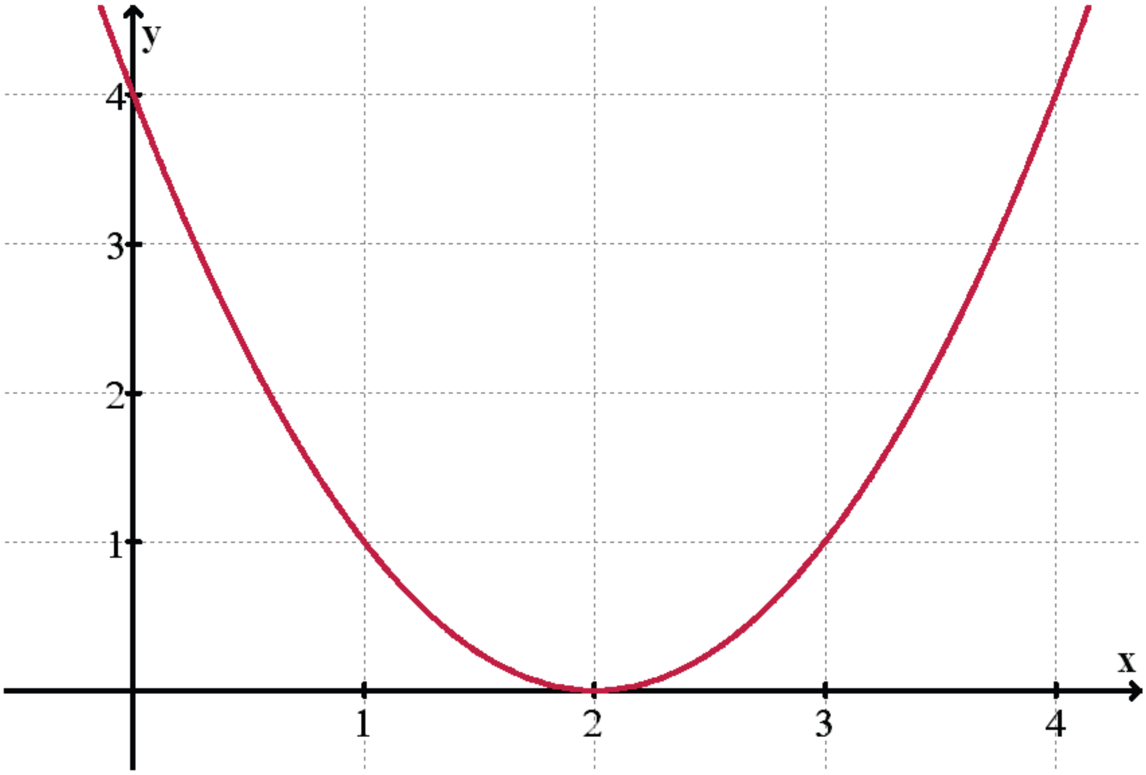


Atividade 2

Determine, caso existam, as raízes reais das seguintes funções:

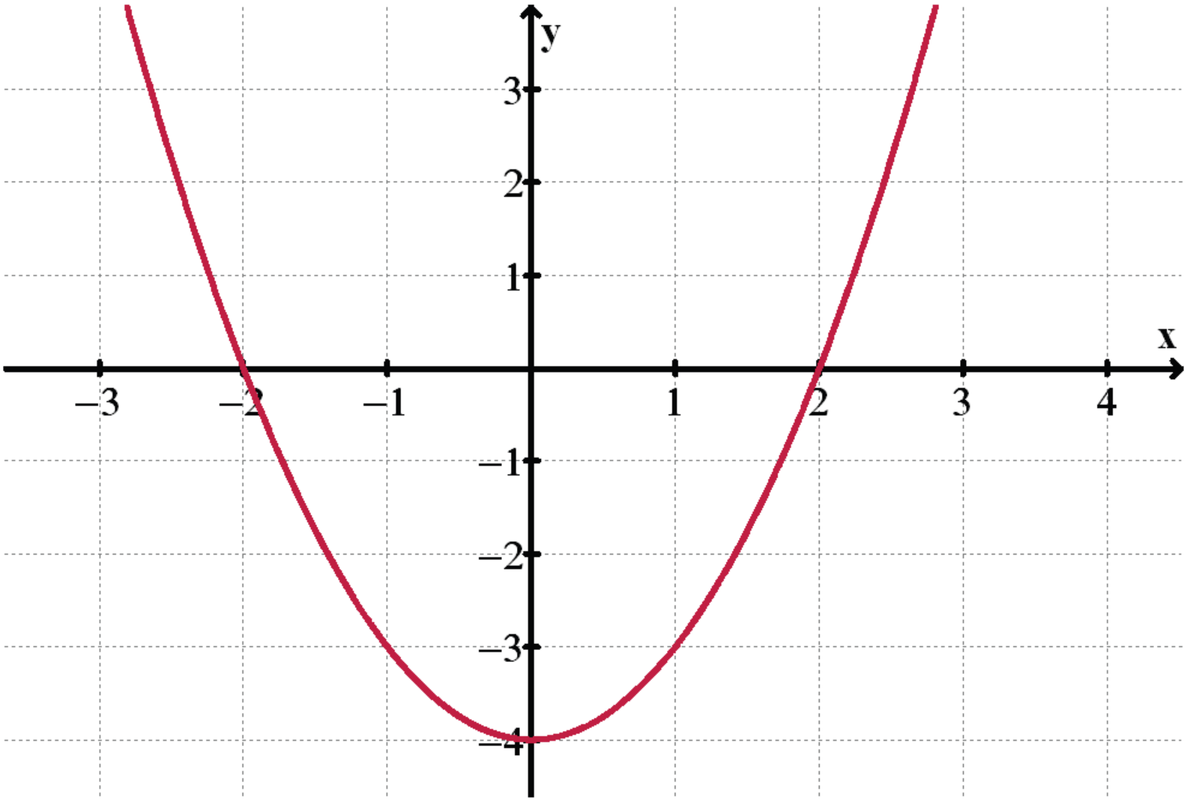
a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b.

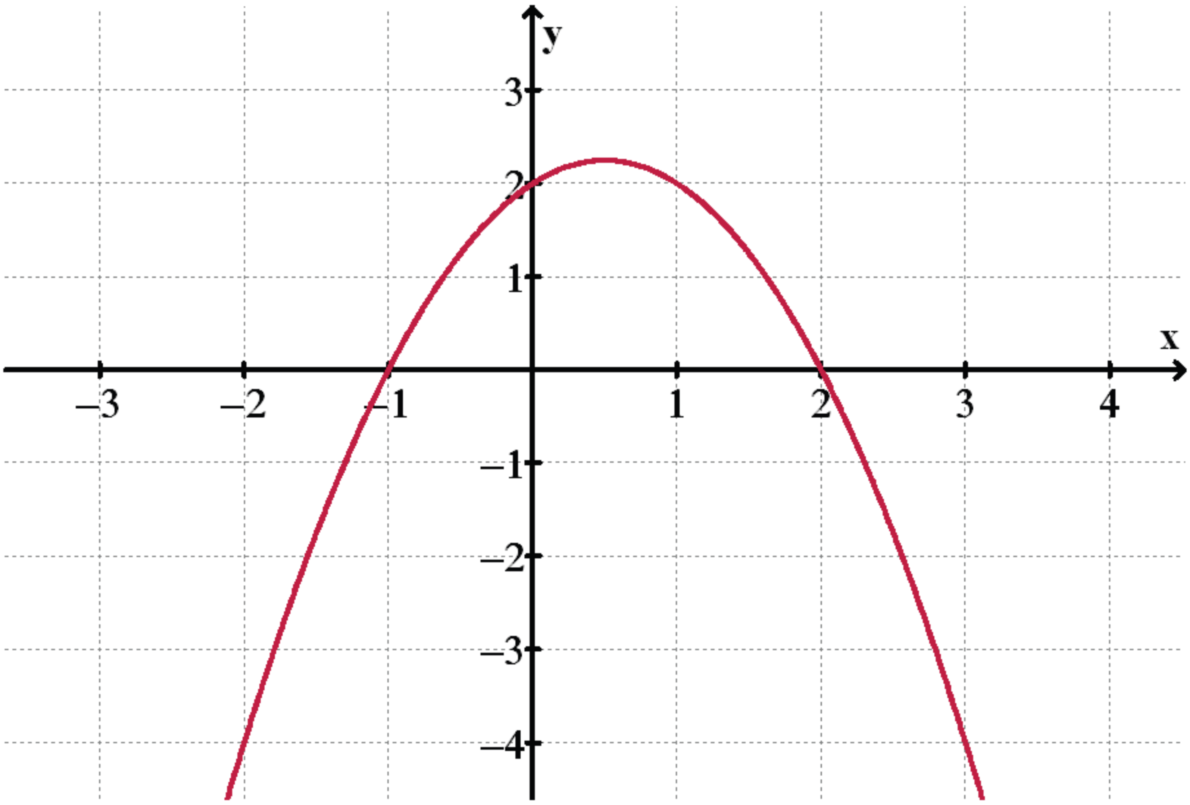


<pág. 105>

b. $g(x) = x^2 - 4$

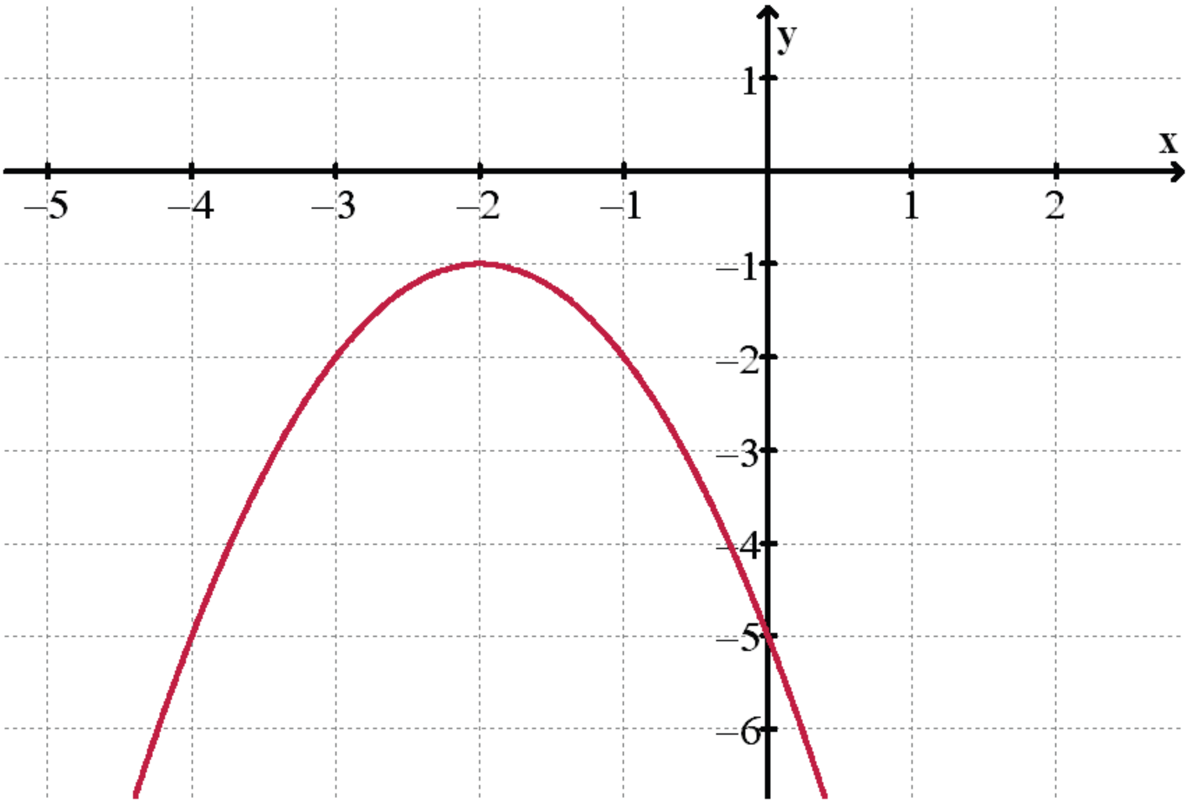


c. $h(x) = -x^2 + x + 2$

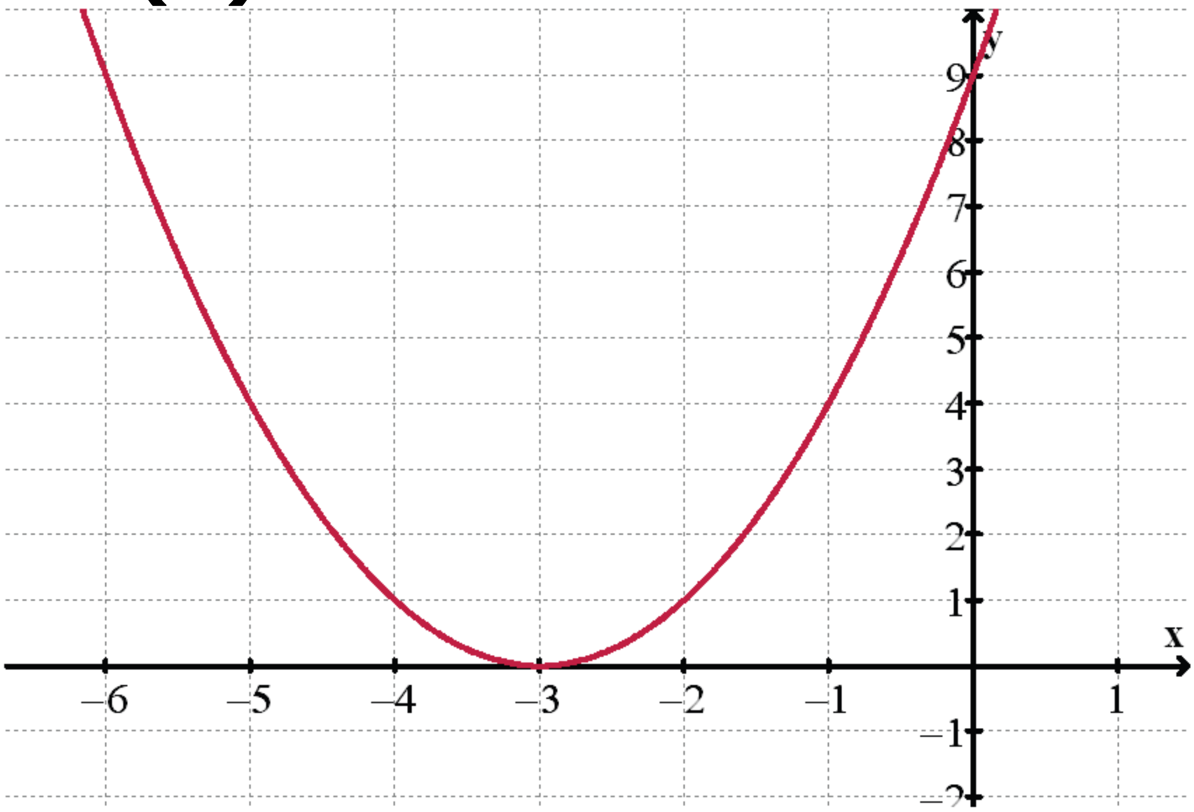


<pág. 106>

d. $q(x) = -x^2 - 4x - 5$



e. $r(x) = x^2 + 6x + 9$



******

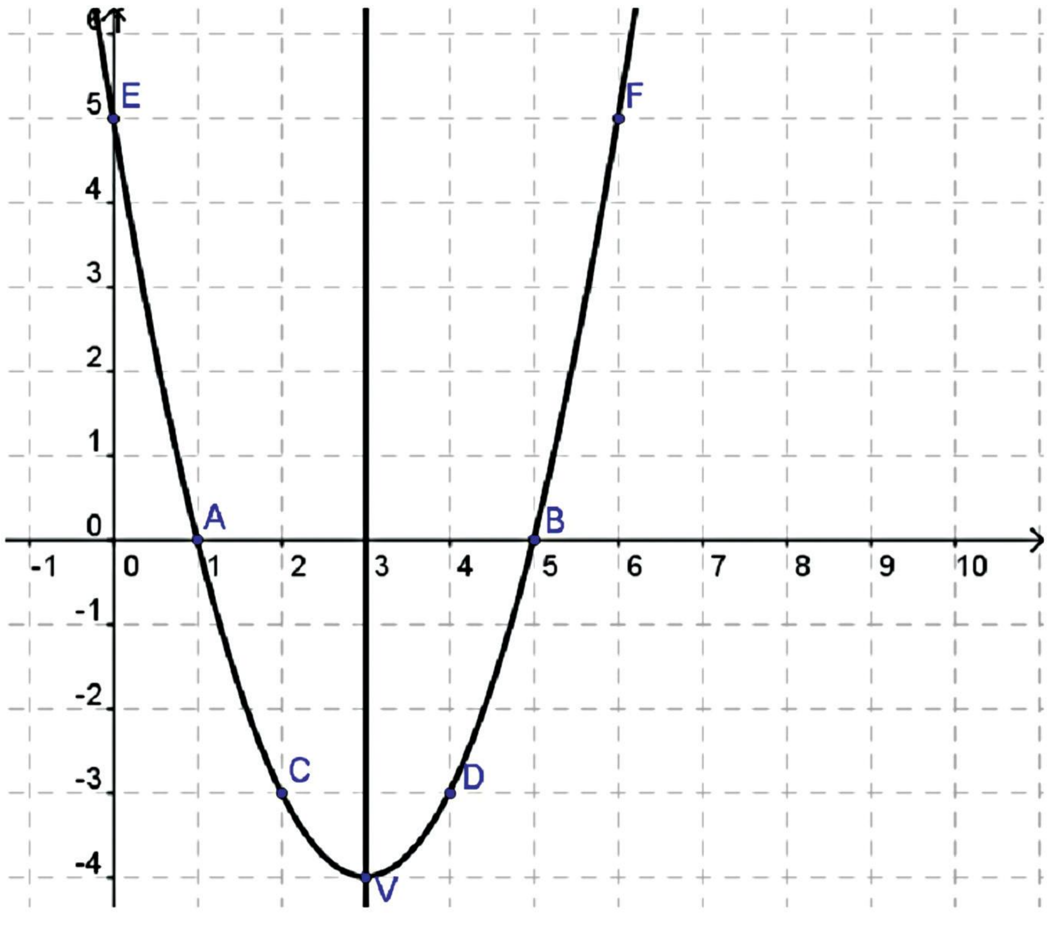
<pág. 107>

O vértice de uma parábola

O vértice de uma parábola é o ponto desta em que a função assume seu valor máximo ou mínimo, dependendo da direção de sua concavidade. A reta

paralela ao eixo y e que passa pelo vértice da parábola é chamada de eixo de simetria da parábola, pois os pontos da parábola são simétricos em relação a esta reta, ou seja, a distância de um ponto da parábola até o eixo de simetria é a mesma do seu ponto simétrico (em relação a esta reta) até o eixo de simetria. Para melhor entendimento, vejamos o gráfico a seguir, que mostra uma parábola, seu vértice e seu eixo de simetria.

Verbete
Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou ponto médio (Holanda Ferreira, 2000).
****



Repare que V(3, – 4) é o vértice da parábola, e a reta que passa por este ponto, e

é paralela ao eixo y é o eixo de simetria. Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria, ou seja, a distância do ponto A até o eixo é igual à distância do ponto B até o eixo. Neste caso, a distância é igual a 2. O mesmo ocorre para os pontos C e D: são simétricos em relação ao eixo de simetria e neste caso a distância é 1. Podemos ainda notar que os pontos E e F também estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, que neste caso é igual 3.

Seção 2
Como construir o gráfico de uma função do 2° grau?

Vimos como identificar os elementos do gráfico da função do 2° grau, mas como podemos construí-lo? Para responder a esta pergunta, precisamos aprender a calcular cada um dos elementos da parábola, vistos na seção anterior. Veja o passo a passo a seguir. Começaremos, calculando as raízes da função.

Passo 1: Zeros (ou raízes) da função

Como você já sabe, as raízes da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, são os números reais x que obtemos ao tomarmos $f(x) = 0$. Elas são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Importante

A quantidade de raízes reais de uma função do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 -$

4ac, chamado discriminante, a saber:

.Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;

.Quando Δ é zero, há só uma raiz real;

.Quando Δ é negativo, não há raiz real.

******

Passo 2: Coordenadas do vértice

Para calcularmos as coordenadas do vértice *V*(*xv, yv*) da parábola, usaremos as fórmulas

$x_v = -\frac{b}{2\text{ª}}$ **e** $y_v = -\frac{\Delta}{4\text{ª}}$ **e , em que**

$\Delta = b^2 - 4ac$

Também podemos obter a coordenada *x* do vértice calculando a média aritmética das raízes. De fato, as raízes dadas pela Fórmula de Bhaskara são

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2^a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta},}{2a}$$

cuja média aritmética é

$$\frac{x_1 + x_2}{2} =$$

$$\frac{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} + \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} =$$

$$\frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Também podemos obter a coordenada *y* do vértice, calculando a imagem de 2*b* *x a* = − pela função *f*.

Vejamos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$

$$\frac{-b^2 + 4ac}{4^a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Saiba Mais
Vale lembrar que o vértice indica o valor mínimo (se a > 0) ou máximo (se a< 0) da parábola e que a reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.
****

Passo 3: Ponto em que o gráfico intersecta o eixo y

Para sabermos qual é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y, basta anularmos a coordenada x.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$; logo, para $x = 0$, temos:

$f(0)=a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c=c$

$f(0)=a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c=c$

Então, o par ordenado (0, c) é o ponto em que a parábola intersecta o eixo dos y.

<pág. 110>

Passo 4: Concavidade da parábola

Antes de construirmos o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, além do cálculo das raízes, das coordenadas do vértice e do ponto de intersecção com o eixo y, é necessário sempre estar

atento à concavidade da parábola. Para isso, basta considerar que:

.se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;

.se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

Importante

Resumindo... Para construir o gráfico de uma função quadrática sem montar a tabela de pares ordenados (*x*,*y*), basta levar em consideração as cinco informações a seguir.

1. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos *x*.

2. O vértice

v $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

indica o ponto de mínimo (se a > 0) ou máximo (a < 0).

3. A reta que passa por *V* e é paralela ao eixo dos *y* é o eixo de simetria da parábola.

4. (0,*c*) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos *y*.

5. O valor do coeficiente *a* define a concavidade da parábola.

Exemplo:

Para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos de determinar o seguinte:

1. As raízes da função

Para determinar as raízes, façamos $f(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3$. Resolvendo essa equação, temos:

$\Delta = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, logo $x_1 = -1$ e

$X_2 = 3$.

2. As coordenadas do vértice,

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{\Delta}{4a} \right)$$

Calculando a coordenada *x* do vértice, temos

$$x_v = - \frac{(-2)}{2.1} = 1$$

Neste caso, poderíamos calcular *xv* através da média aritmética das raízes:

$$x_v = - \frac{1+3}{2} = 1$$

Calculando a coordenada *y* do vértice, temos 2

$\Delta = (-2)^2 - 4 . 1 . (-3) = 16$, e, assim, $y_v = -\frac{16}{4.1} = -4$

Poderíamos determinar o valor de y_v calculando a imagem de x_v pela função f, isto é, $y_v = f(x_v) = 1^2 - 2 . 1 - 3 = -4$.

Logo, o vértice é o ponto *V* (1, – 4).

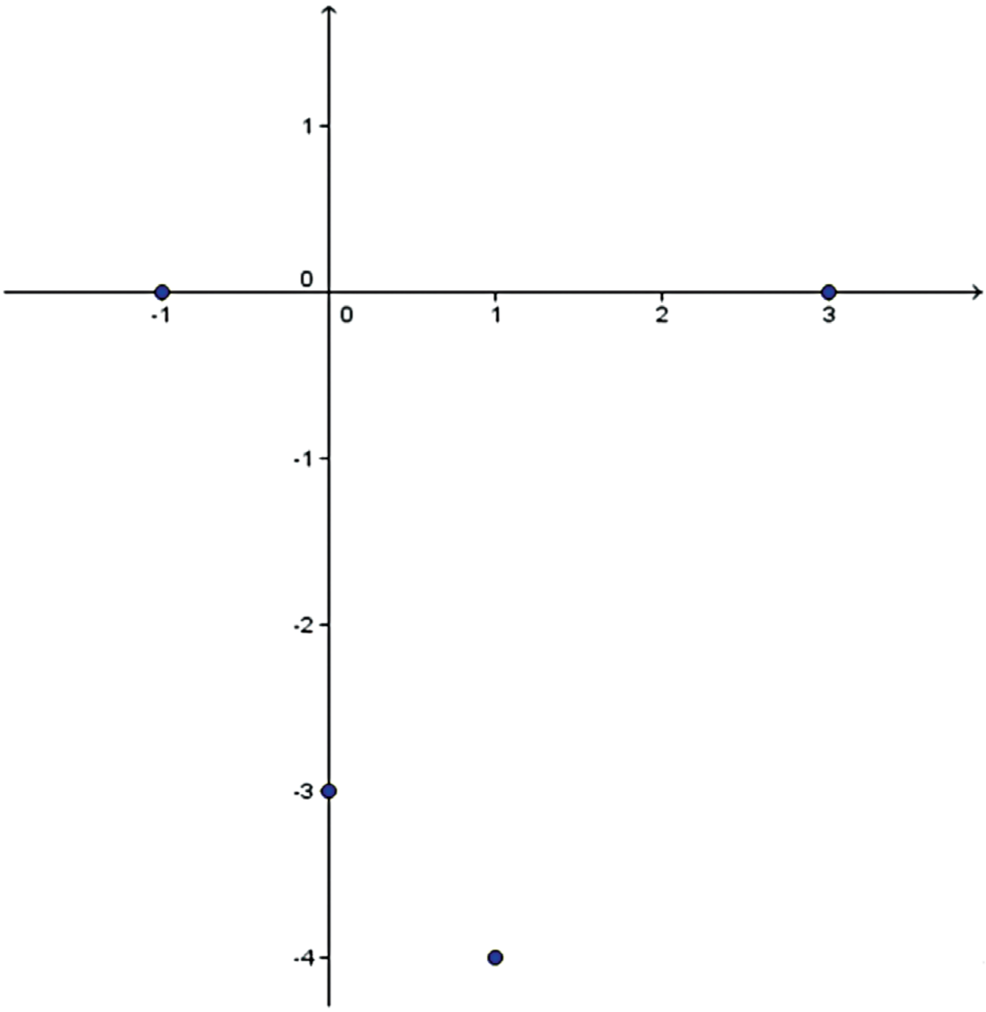
<pág. 111>

3. O ponto onde a parábola intersecta o eixo *y*

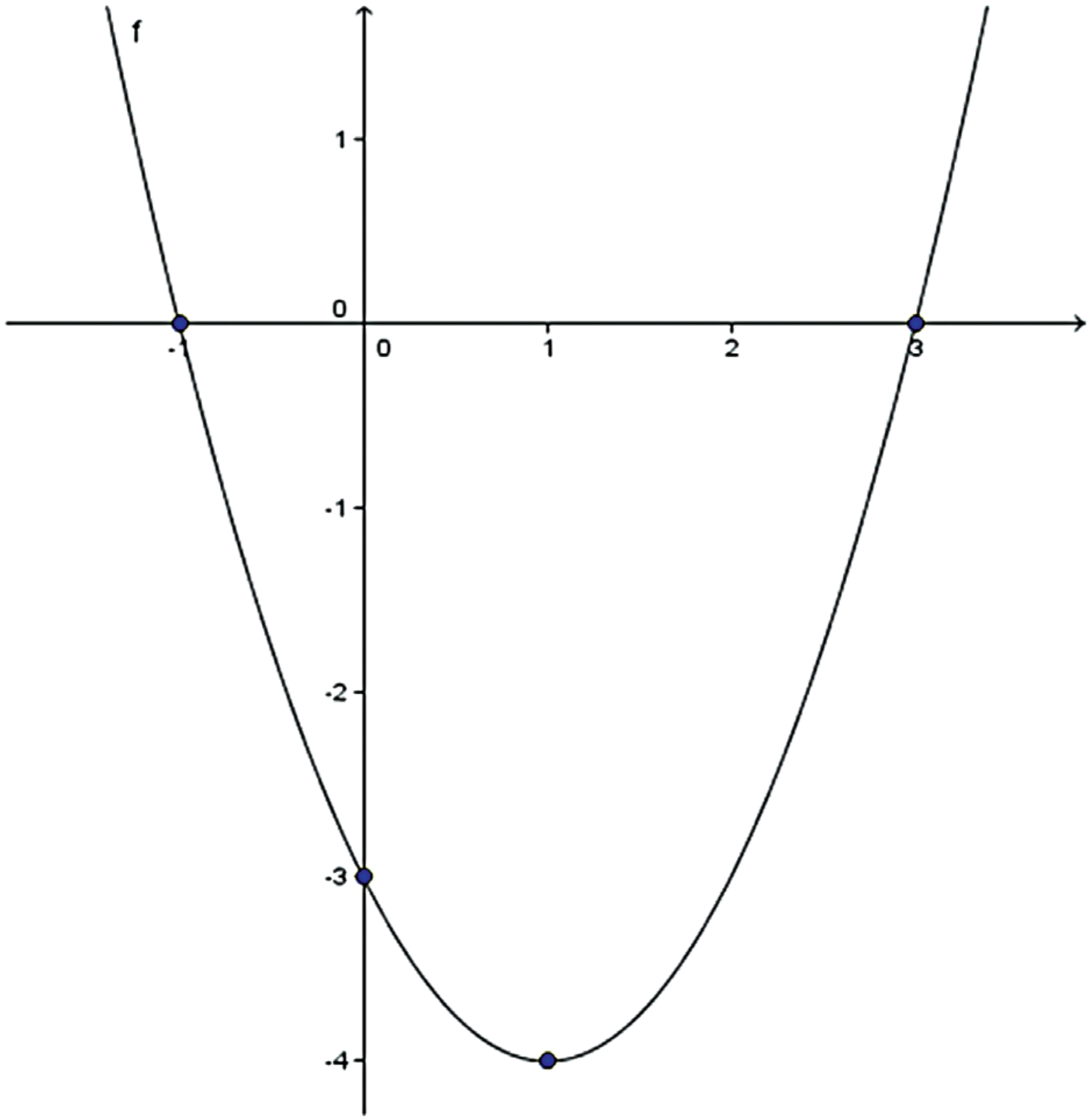
Para isso, usamos o valor de *c*, que neste caso é – 3. Logo, o ponto é (0,– 3).

4. A concavidade da parábola

A concavidade está voltada para cima, pois *a* = 1, ou seja, é positivo. Portanto, o vértice será um ponto de mínimo. Agora marcamos os pontos obtidos, como mostra a figura a seguir:



Como sabemos que a concavidade está voltada para cima, devemos unir os pontos desenhando uma parábola, como mostra a figura a seguir:



<pág. 112>

Agora é com você. Faça a atividade 3 e confira seu aprendizado.

Atividade 3

Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 2x - 1$

c) $h(x) = x^2 + 2x + 3$

Seção 3
Aplicações da função quadrática

Veremos agora algumas aplicações da função quadrática e como todos esses conceitos que acabamos de estudar podem ser utilizados para resolvermos problemas

práticos. Para isso, apresentaremos três exemplos com suas respectivas resoluções.

Exemplo 1:

Desejamos construir um canteiro, para plantações, em um grande jardim de formato quadrado de 36 m^2 de área, como mostra a figura a seguir, com $0 < x < 3$.

1. Se $x = 2$, qual será a área do canteiro?

2. Mostre que a área do canteiro depende do valor de x.

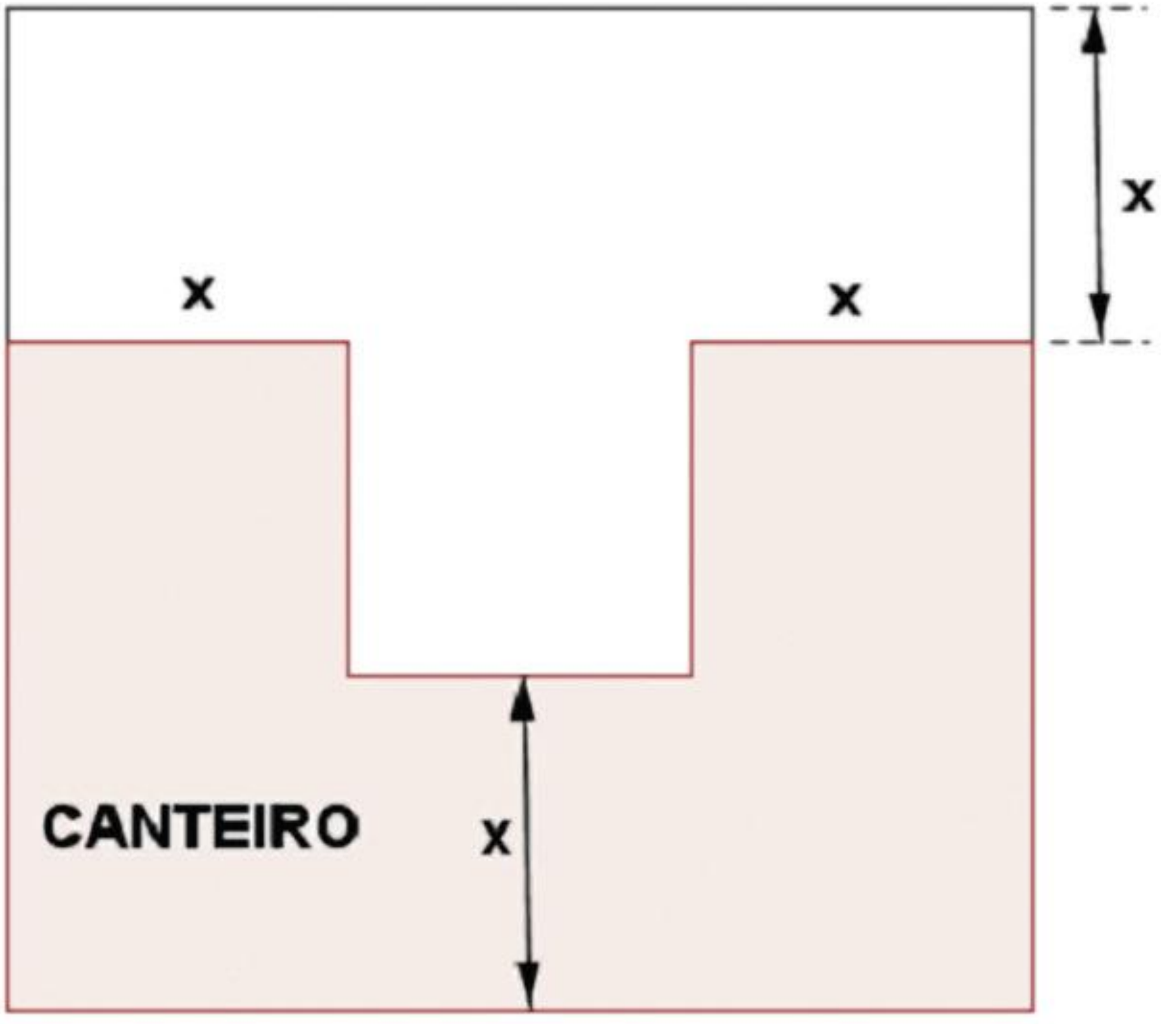
3. Para que valor de x esse canteiro terá a maior área possível?

4. Qual é o valor dessa área?

5. É possível observar graficamente a variação dessa área em função de x. Construa um gráfico que dá a área do canteiro (no eixo y) em função do valor de x.

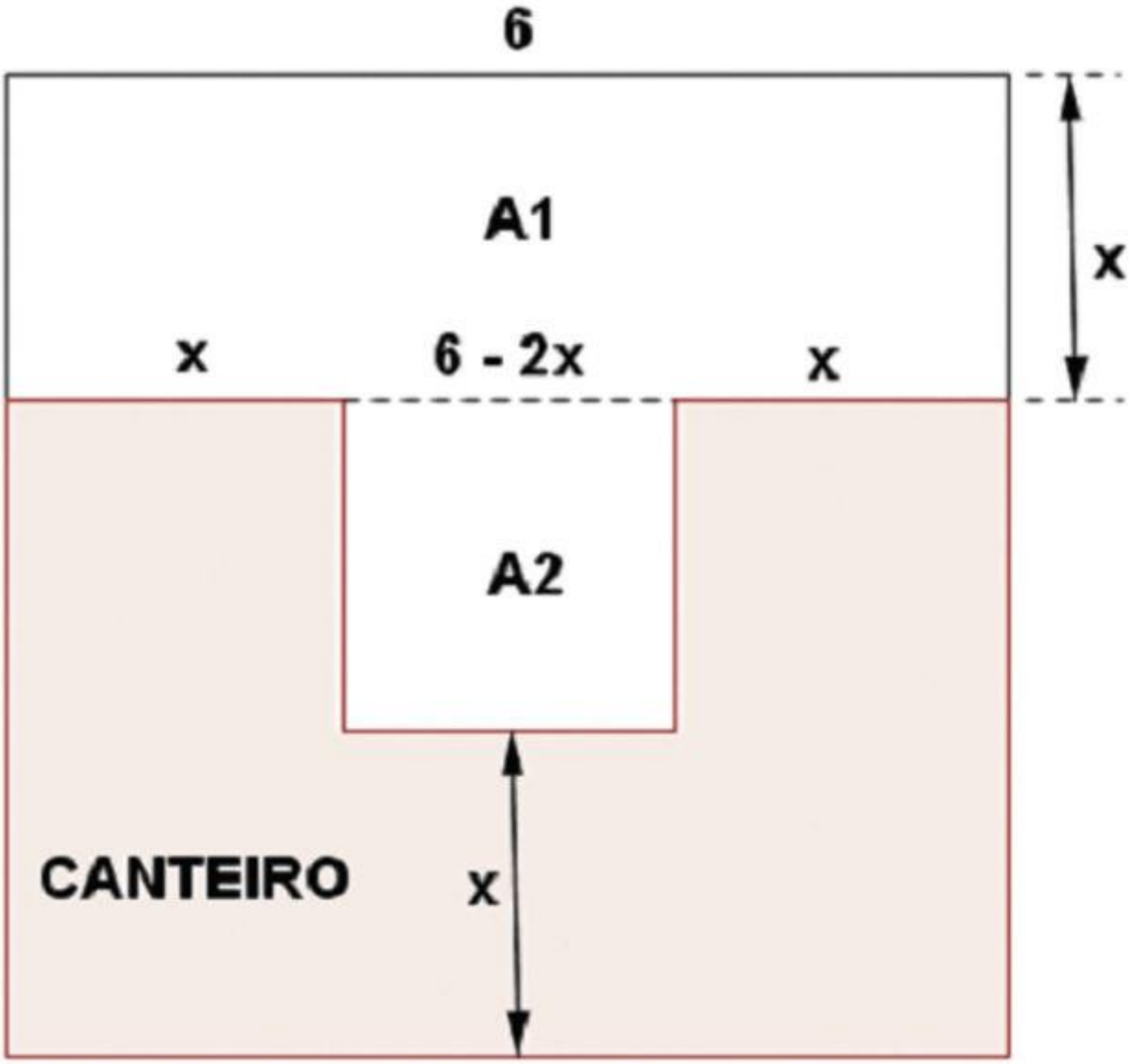
<pág. 113>

52



Como o jardim tem formato quadrado de área 36 m², temos que o lado deste é igual a 6 m. Para calcularmos a área do canteiro (A), devemos subtrair da área do jardim as áreas dos retângulos

A1 e A2 indicadas na figura a seguir.



Temos:

A = 36 – A1 – A2, como A1 = 6x e A2 = (6 – 2x)², então

$A = 36 - 6x - (6 - 2x)^2 = 36 - 6x - (36 - 24x + 4x^2) = 36 - 6x - 36 + 24x - 4x^2$,

ou seja,

$A = -4x^2 + 18x$

Logo, a área desse canteiro é expressa por uma função do 2º grau. Vamos responder aos itens do enunciado desse exemplo.

1. Se $x = 2$, a área do canteiro é $A = -4(2)^2 + 18(2) = -16 + 36 = 20$ m².

2. A expressão $A = -4x^2 + 18x$ mostra que o valor de A depende do valor de x, isto é, ao variarmos o valor de x, variamos também do valor de A.

<pág. 114>

3. Note que a função quadrática que dá o valor de A em função de x possui coeficiente a negativo. Dessa forma, A possui um valor máximo dado pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ e o valor de x para que tal fato ocorra é dado pela fórmula $-\frac{b}{2a}$.

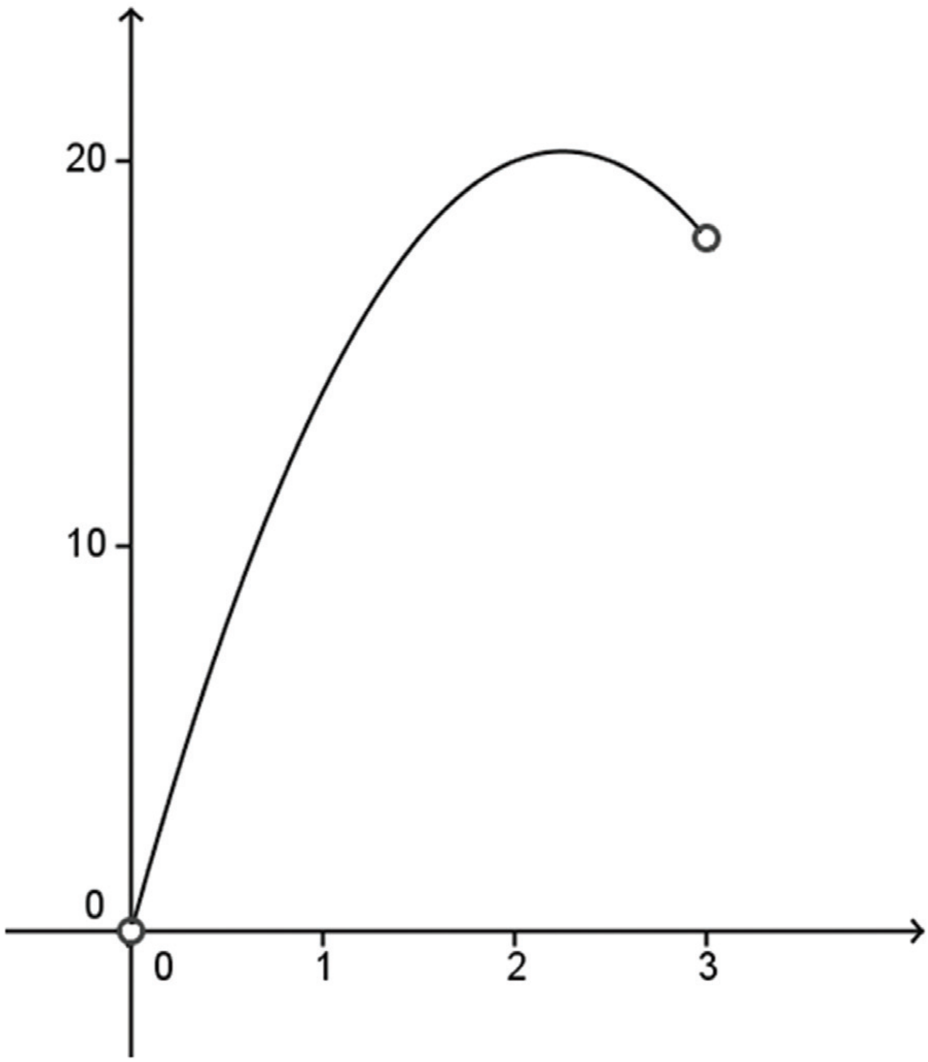
Assim, $x_{max} = \frac{-18}{-8} =$ 2,25.

Logo, o valor de x é 2,25 m.

4. Utilizando a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, temos que

$\Delta = 324 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 324$ e que a área máxima do canteiro é $A_{max} = \frac{-324}{-16} = 20{,}25 m^2$.

5. Vamos construir o gráfico que dá a variação da área em função do comprimento x. Note que x não pode assumir qualquer valor real, mas apenas valores entre 0 e 3.



Exemplo 2 (adaptado da U.F. Santa Maria – RS):

Algumas placas de advertência para o trânsito têm a forma de um quadrado de lado 1m, que possui no seu interior

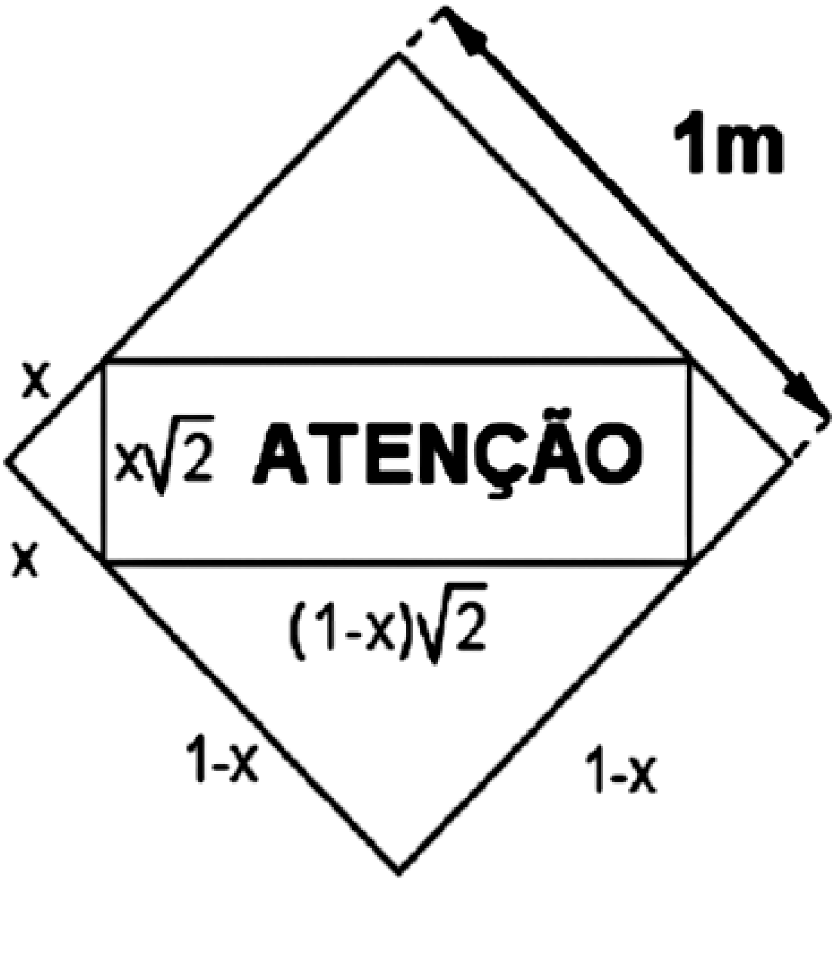
retângulos destinados a mensagens, como mostra a figura a seguir.

<pág. 115>

Dentre os possíveis retângulos, determine aquele que tem a maior área.

Solução:

Os lados do retângulo são $x\sqrt{2}$ e $(1-x)\sqrt{2}$, pois são hipotenusas dos triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura:



Assim, a área do retângulo é dada pela função A9x) =

$(1 - x)\sqrt{2}x\sqrt{2})$, ou seja, $A(x) = -2x^2 + 2x$. A área máxima é obtida pela fórmula $-\dfrac{\Delta}{4a}$, e o

comprimento *x* que dá o retângulo de área máxima é obtido pela fórmula $\dfrac{b}{2a}$.

Assim,

$$x = \frac{2}{2 \cdot (-2)} = 0{,}5$$

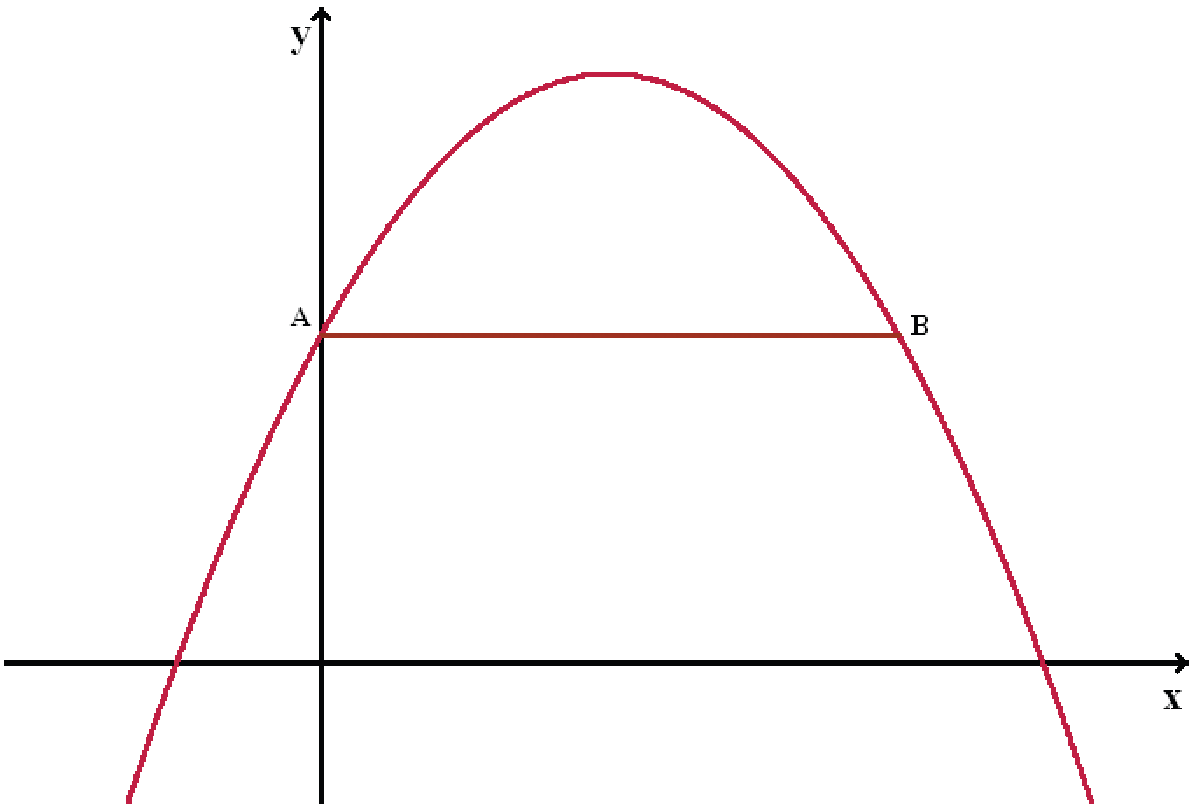
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 4$$

$$\text{e } A_{max} = \frac{-4}{4 \cdot (-2)} = 0{,}5$$

Logo, todos os lados retângulo medem $0{,}5\sqrt{2}$ m e a área máxima do retângulo é de $0{,}5$ m².

Exemplo 3 (adaptado da UF-MG):

Na figura a seguir, os pontos A e B estão sobre o gráfico da função do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$. O ponto A é o ponto de interseção da parábola com o eixo y, e o segmento AB é paralelo ao eixo x.



Determine o comprimento do segmento AB.

Solução:

Como a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à distância do ponto B até o eixo de simetria, então o comprimento do segmento

AB é o dobro desta distância. Sabemos que a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à coordenada x do vértice da parábola, ou seja, $-\frac{b}{2a}$.

Logo, o comprimento do segmento AB é igual a

$$2 \cdot -\left(\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

Agora, sugerimos duas atividades, relacionadas a problemas reais. Para isso, apresentaremos situação-problema, envolvendo variação de grandezas como recurso para a construção de argumentos.

Atividade 4

Um modesto hotel tem 50 quartos individuais e cobra R$ 40,00 pela diária. Com o aumento da procura, devido ao evento "Rio+20", o dono do hotel resolveu aumentar o preço da diária para lucrar mais.

Mas percebeu que para cada R$ 2,00 de aumento na diária ele perdia um hóspede. Dessa forma, quanto ele deve cobrar pela diária para que sua receita (produto do preço da diária pela quantidade de hóspedes) seja a maior possível?

****

<pág. 117>

Atividade 5

PUC-MG Uma pedra é atirada para cima e sua altura h, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$,

em que t é medido em segundos.

Se a pedra atingiu a altura máxima no instante t = 2s, pode-se afirmar que o valor de a é:

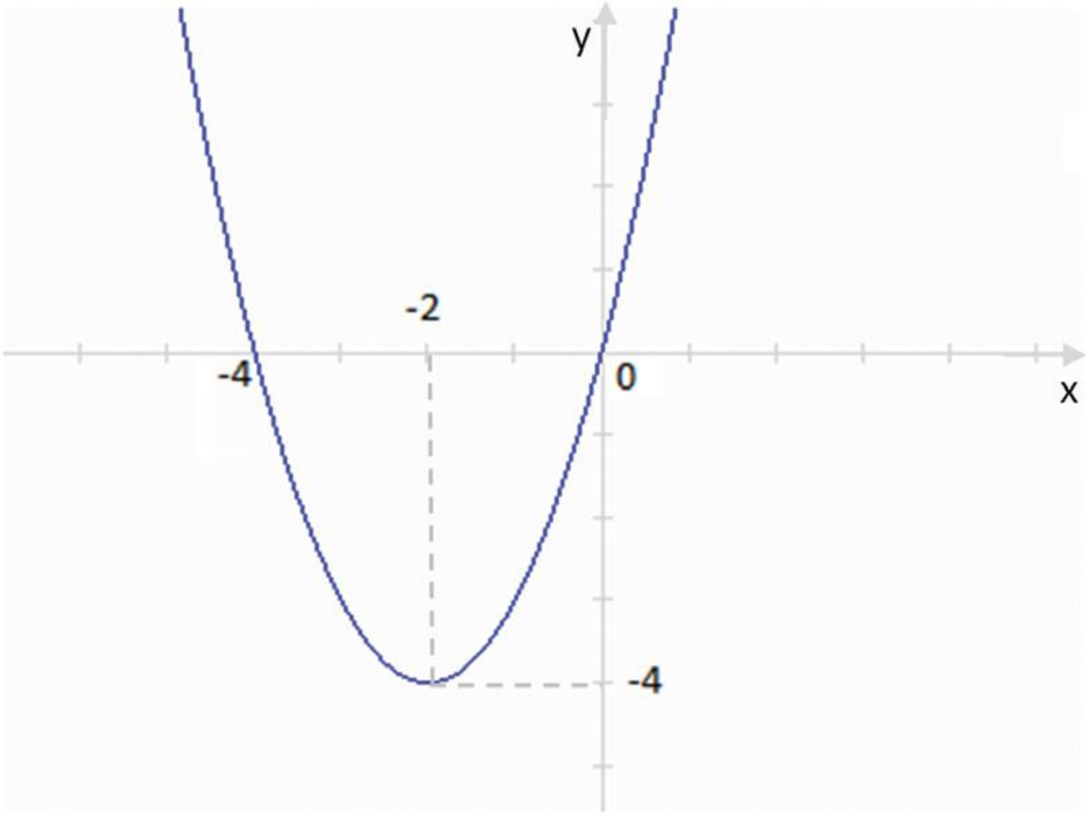
a. – 3
b. – 2
c. 2
d. 3

******

Atividade 6

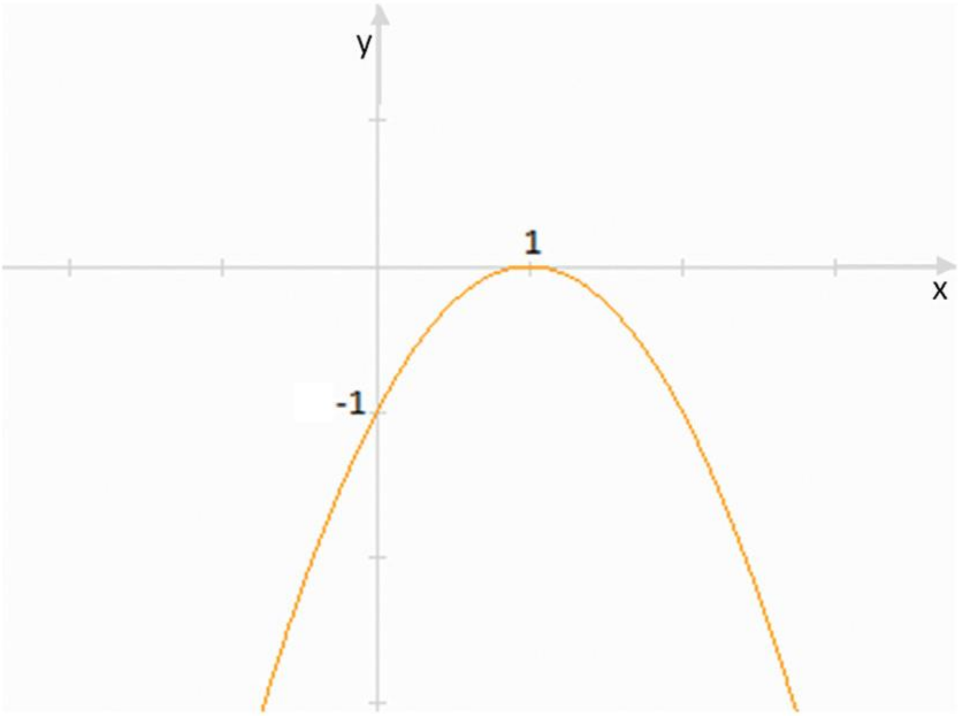
Determine os coeficientes a, b e c de cada uma das funções do 2º grau representadas graficamente abaixo.

a.



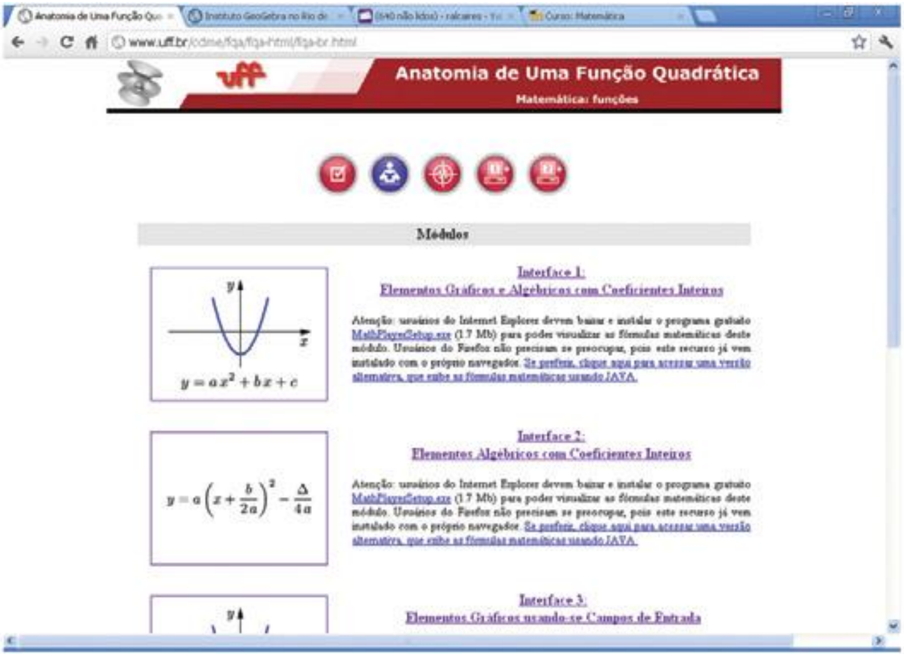
68

b.



<pág. 118>

Multimídia



Página da UFF de conteúdos digitais para ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística.

Explore os elementos gráficos de uma função do 2° grau na "Anatomia de uma função quadrática". Visite: http://www.uff.br/cdme/fqa/fqa-html/fqa-br.html
****

Nesta unidade, vimos a importância do estudo de funções polinomiais do 2° grau e foram apresentadas várias aplicações práticas. Entendemos também que podemos tomar decisões importantes por meio de um estudo detalhado, obtido pela análise da lei de formação de funções do 2° grau. Além disso,

aprendemos a fazer uma leitura e interpretar gráficos de funções do 2° grau.

Resumo

- **.Função polinomial do 2º grau (também chamada de função quadrática) é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.**
- **.O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Essa curva tem concavidade voltada para cima, quando $a>0$ e para baixo, quando $a < 0$.**
- **.O vértice V (x_v, y_v) da parábola é obtido pelas fórmulas $x_v = -b/2a$ e**

$y_v = -\Delta / 4a$, onde
$\Delta = b^2 - 4ac$.

.O vértice de uma parábola será um ponto de máximo, quando a concavidade estiver voltada para baixo, e será um ponto de mínimo, quando estiver voltada para cima.

.Os zeros ou raízes da função do 2° grau são obtidos ao tomarmos f(x) = 0 e podem ser calculados pela fórmula 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Veja Ainda

Para entender como se demonstram as fórmulas contidas nesta unidade e para conhecer um pouco mais sobre este assunto, indicamos os seguintes sites:

.http://matematizando-gabriel.blogspot.com.br/2011/05/aqui-esta-deducao-da-formula-da.html (dedução da fórmula das coordenadas do vértice).

<pág. 119>

.http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html (a fórmula de resolução de equação do 2° grau não é de Bhaskara).

.http://www.mais.mat.br/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_quadr%C3%A1tica (aplicações).

Referências

Livros

.HOLANDA FERREIRA, A. B. de. Minidicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

.IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. Matemática: ciência e aplicações, Saraiva, vol.1.

.LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. A matemática do Ensino Médio, vol.1, SBM.

.Revista do Professor de Matemática (RPM) 39, p. 54.

<pág. 120>

Respostas das atividades

Atividade 1

a. para cima e ponto de mínimo

b. para baixo e ponto de máximo

c. para baixo e ponto de máximo

d. para cima e ponto de mínimo

e. para cima e ponto de mínimo

Atividade 2

a. A raiz é 2

b. As raízes são -2 e 2

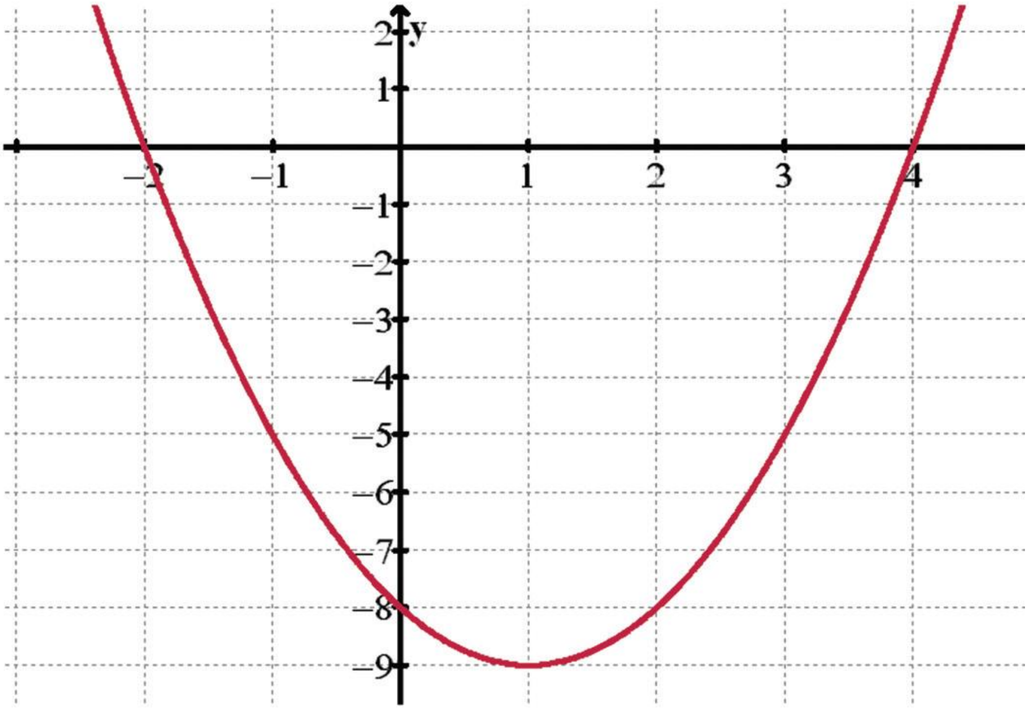
c. As raízes são -1 e 2

d. Não tem raiz real

e. A raiz é -3

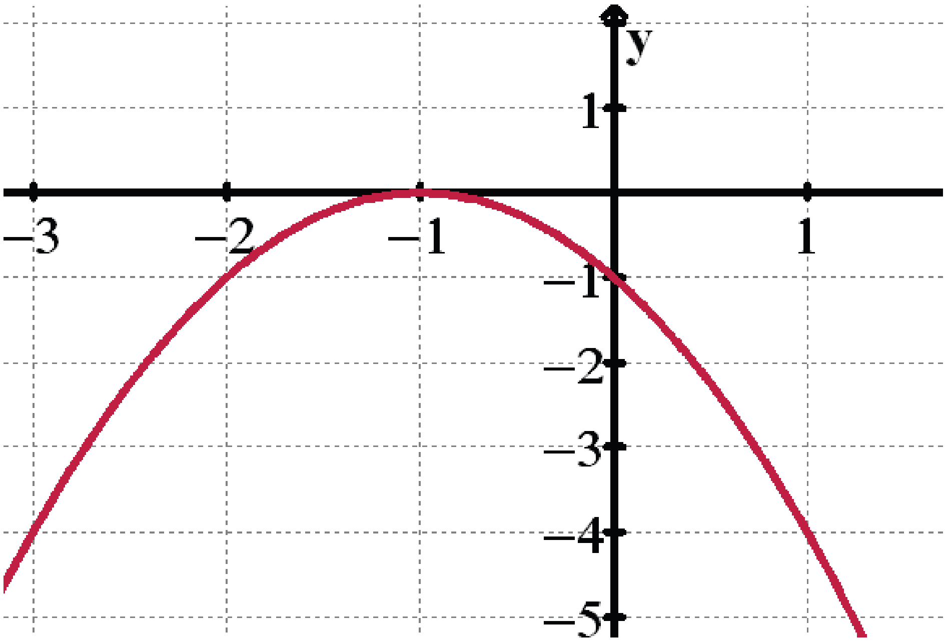
Atividade 3

a.

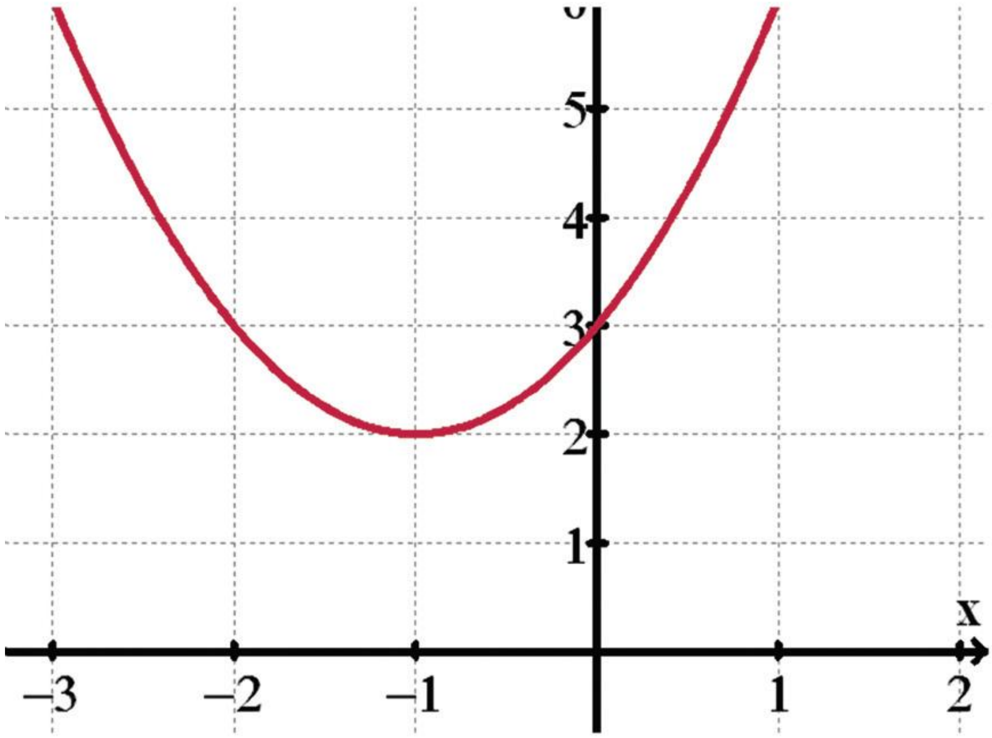


<pág. 121>

b



c.



Atividade 4

A receita é dada pela fórmula $R(x) = -2x^2 + 60x + 2000$. Logo, o preço para que a receita seja máxima será igual a $p = 70$. Tomar cuidado que $p \neq x$.

Atividade 5

Usando a fórmula do x_v, temos que *a* = – 3. Logo, a alternativa correta é a letra a.

Atividade 6

a. $f(x)=x^2+4x$

b. $f(x)=-x^2+2x-1$

O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM 2000)

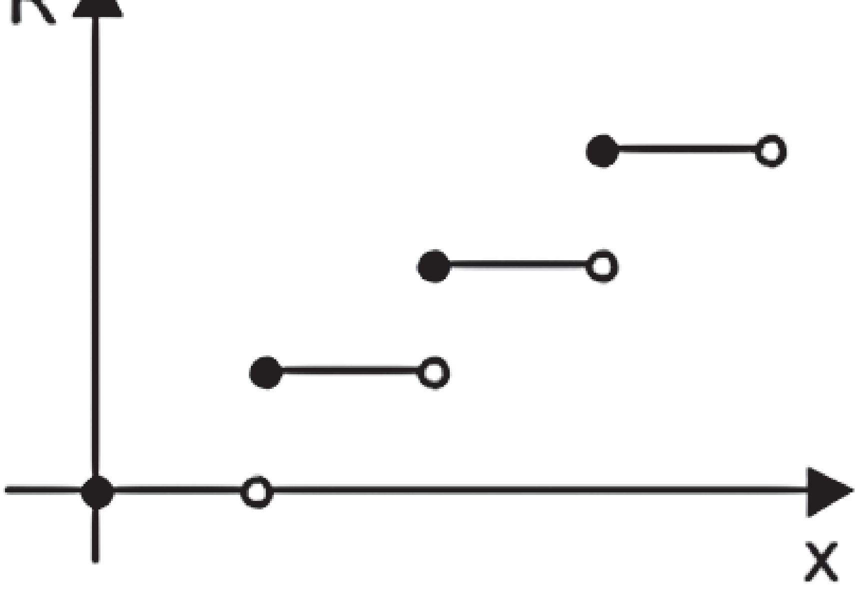
Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é

diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

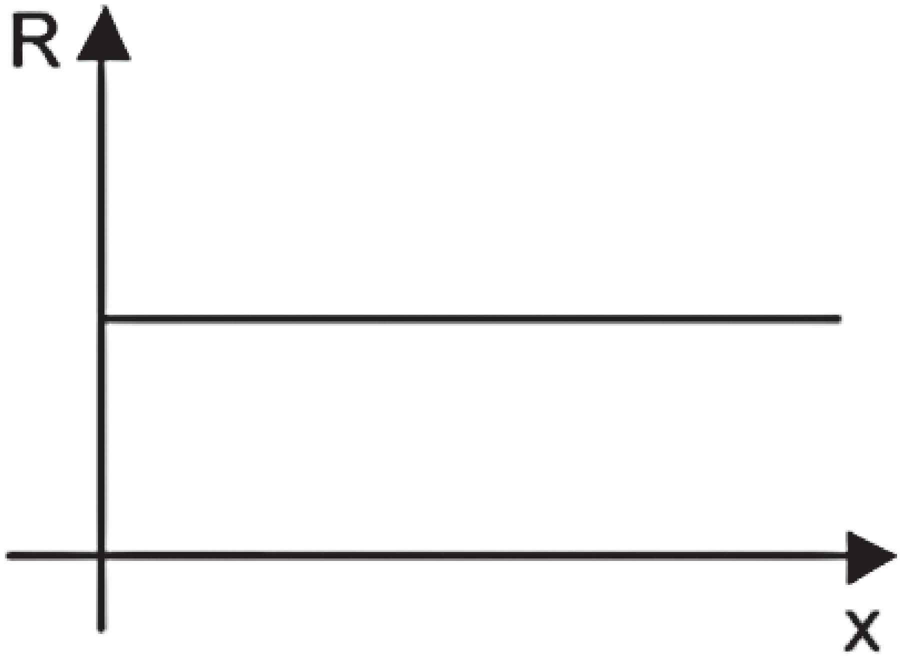
R(x) = k.x.(P-x), onde k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:

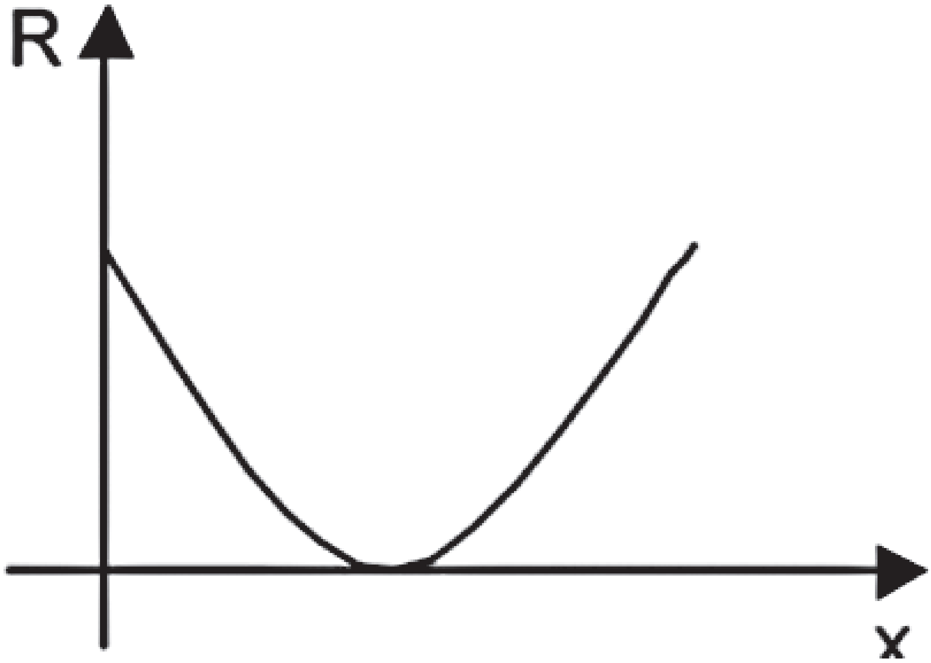
A)



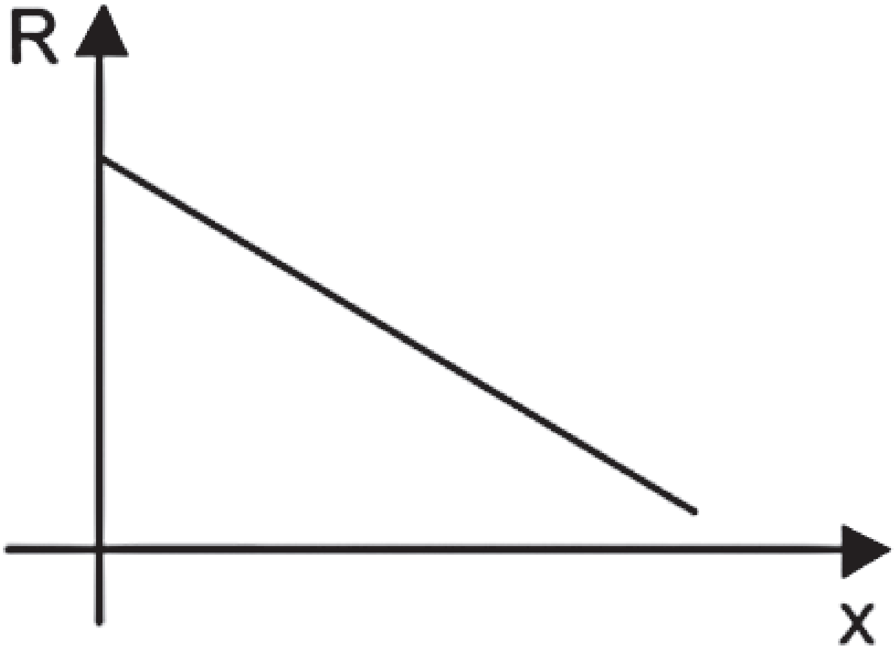
B)



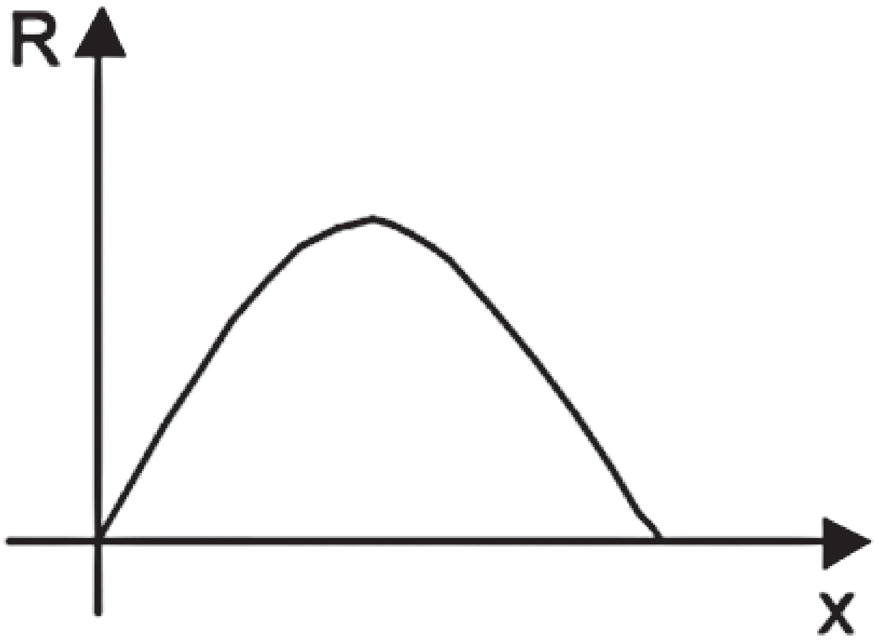
C)



D)



E)



<pág. 124>

Solução:

A rapidez de propagação de um boato é dada pela função do 2° grau $R(x) = k.x.(P - x)$, ou seja, $R(x) = kPx - kx^2$. Como uma função do 2° grau é descrita como $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos dizer que, neste

caso, $a = -k$, $b = kP$ e $c = 0$. Como k é positivo, então o valor de a é negativo, podemos então afirmar que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Como a única alternativa em que a parábola tem

concavidade voltada para baixo é a letra E, então esta é a alternativa correta. Observe ainda que quando x = 0, R = 0 também, o que confere com o gráfico.

Atividade 2

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a. 11.000
b. 22.000
c. 33.000

d. 38.000

e. 44.000

Solução:

A máxima rapidez de propagação (R_{max}) ocorre quando o número de pessoas que conhece o boato for máxima (x_{max}). Devemos, assim, calcular o x do vértice (x_v) da parábola, mostrada anteriormente. Para isso, usaremos a fórmula

$x_v = - b/2a$. Temos, então, $x_v = -kP/2\cdot(- k)$. Como o público-alvo é de 44.000 pessoas, temos que P = 44000. Substituindo na fórmula do x do vértice, temos: $x_v = 44000/2$, ou

seja, x_v = 22000. Logo, a alternativa correta é a letra b.

Atividade 3 (Faap-SP)

Uma companhia estima que pode vender mensalmente *q* milhares de unidades de seu produto ao preço de *p* reais por unidade. A receita mensal das vendas é igual ao produto do preço pela quantidade vendida. Supondo $p = -0,5q + 10$, quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível?

a. 18

b. 20

c. 5

d. 10

e. 7

<pág. 125>

Solução:

Como a receita mensal das vendas é o produto do preço pela quantidade vendida, então se chamamos de R a receita, temos: $R = p \cdot q$, e substituindo p pela expressão fornecida na questão, $R = (-0,5q + 10)q$. Assim, chegamos à função do 2° grau $R = -0,5q^2 +$

10q. Para determinarmos quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível, devemos determinar o valor de q dado pela fórmula $-b/2a$. Logo, $q_{max} = -10/2\cdot(-0,5) = -10/-1 = 10$. Logo, deve vender 10 mil unidades para que a receita seja máxima. A resposta é a alternativa d.

<pág. 127>

Caia na Rede!

No link: http://www.mais.mat.br/wiki/Esse_tal_de_Bhaskara é possível assistir a um vídeo que fala sobre Bhaskara.

http://www.mais.mat.br/wiki/Roda_de_samba. O vídeo mostra como podemos calcular o lucro máximo na venda de ingressos em um determinado evento.

Unidade 18

<pág. 5>

Vamos poupar dinheiro!

Para início de conversa...

Observe a história em quadrinho abaixo:


Olá, Leon! É mesmo, quanto tempo. O que ocorreu para estar assim tão feliz?


Ganhei aproximadamente R$ 2.000,00, fazendo a quadra no jogo da quina, no concurso de nº 2914, do dia 04/06/2012.


Poxa, Leon, parabéns! Você sempre teve sorte. Por acaso, já sabe o que irá fazer com esse dinheiro?


Sei sim. Vou colocar na poupança. Deixar lá por um tempo, uns cinco anos.


Mas você sabe mais ou menos quanto você terá daqui a cinco anos, investindo na poupança?


Sinceramente? Não...


Se quiser, posso te ajudar, pois aprendi na escola como fazer esse tipo de operação.


Mesmo? Que legal! Aceito sua ajuda sim, Lara.


Passe lá em casa no sábado e estudaremos um pouco juntos.

(Textos no interior dos balões: Balão 1 - Ok. Então está combinado. Até, sábado. Balão 2 – Até sábado.)

<pág. 6>

Todos nós sabemos que é muito bom guardar um dinheirinho na poupança, pois lá nosso dinheiro irá render, não é mesmo? Mas será que você saberia

calcular o quanto renderá? Se colocarmos dois mil reais hoje, como fez Leon, você saberia dizer quanto teremos daqui a cinco anos? Ou, então, se depositarmos dez mil reais hoje, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais? Esses são alguns questionamentos que podem tanto auxiliar Leon quanto a nós mesmos.

Nesta unidade, vamos analisar esta e outras situações que envolvem o conhecimento do mesmo conceito matemático: o de função exponencial. Mas não fiquem assustados com esse nome! Esta função

caracteriza-se pelo uso das potências. Vocês se lembram delas?

Fiquem tranquilos, pois, caso seja necessário relembrar alguma coisa, vocês verão aqui nesta aula mesmo.

E então, vamos lá?!

Objetivos de aprendizagem

.identificar fenômenos que podem ser modelados por uma função exponencial;

.identificar a representação algébrica, gráfica e as principais propriedades da função exponencial;

.resolver problemas, utilizando a função exponencial;

.resolver equações exponenciais simples.

Atividade

Você deve ter observado que não há números no texto. Em que aspectos você acha que a falta desses dados numéricos prejudicou a compreensão do texto? Você conseguiria apontar onde a falta de números mais prejudicou a compreensão? Por quê?

Registre a seguir suas reflexões.

Questionamentos como esses irão motivar as discussões que faremos nessa unidade.

<pág. 7>

Seção 1

Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Leon foi à casa de Lara, que teve a maior paciência para explicar o que iria acontecer com o dinheiro que seu amigo depositou na poupança. Como Lara fez isso?

Inicialmente, vamos tentar entender como esse processo funciona. Quando depositamos um valor em uma poupança, o valor disponível (saldo) é alterado de mês em mês. O curioso é que este valor é alterado para cima, ou seja, ganhamos dinheiro sem fazer esforço. A taxa de ganho, a partir da qual é calculado o valor que ganhamos a cada mês, é o que chamamos de taxa de juros. Assim, ao encontrar Leon, Lara considerou algumas coisas importantes: o dinheiro que Leon estava investindo (capital) era de R$ 2.000,00 (dois mil reais)

e a taxa de juros que a poupança praticava era de 6% ao ano. Isso significa que, ao longo de um ano inteirinho, o dinheiro lá depositado aumentará em 6%.

Verbete
Juros

Juro é uma noção utilizada na economia e nas finanças para mencionar a utilidade, o ganho, o valor ou o rendimento de algo.
******

Você se lembra de como se fazem os cálculos para se

determinar 6% de um valor?

Vamos mostrar duas formas:

A primeira utiliza lápis e papel:

Seis por cento significam 6 a cada 100, ou seja, 6/100 .(*essevalor*). Sendo assim, 6% de algum valor é calcular, 6/100 .(e*ssevalor)*.×(esse valor).

A segunda faz uso de uma calculadora:

Digite a quantia considerada (no caso de Leon, serão 2.000 reais), aperte o botão de multiplicação e em seguida

o número decimal 0,06 (que representa seis centésimos, ou seja, 6%). Dessa forma, o número que aparecer no visor da calculadora será o valor desta porcentagem.

Saiba Mais

A seção de economia dos noticiários faz referência quase diária à Taxa Selic. Você sabe que taxa é essa? Para descobrir o que é, quem a define e qual a importância dessa taxa para a economia e o mercado financeiro, visite o *site* http://blog.investmania.com.br/2012/06/08/afinal-o-que-e-a-taxa-selic/.

******

<pág. 8>

Importante

Existem duas maneiras de se fazer o cálculo de juros. A primeira delas, que mostramos no exemplo da poupança, é chamada de juros compostos, porque o cálculo dos juros de um mês é feito sobre o valor atualizado, que incorpora os juros do mês anterior. Nesse tipo de cálculo, por assim dizer, são aplicados juros sobre juros. Na outra maneira, chamada de juros simples, os juros são

calculados sempre sobre o valor inicial, não levando em conta as atualizações referentes aos juros dos meses anteriores.
******

Agora é com você! Faça as atividades para entender melhor como se calcula a porcentagem de algum número ou valor monetário.

Atividade 1

Uma pessoa pagará uma conta de 400 reais com atraso. Por essa razão, pagará de multa 2% do valor da conta. Qual o valor da multa? Qual o valor total

a pagar?
******

Atividade 2

Vamos lembrar do caso de Leon. O valor de R$ 2.000,00 depositado na poupança irá render 6% de juros ao longo de um ano. Qual quantia estará disponível ao final desse período?
******

Muito bem! Pelo que percebemos, estamos conseguindo calcular essas porcentagens. Mas, quando se trata de banco e vida financeira, a coisa não fica tão simples assim. O que

esta discussão tem a ver com a função exponencial que mencionamos no início? Vamos ver isso logo, logo.

<pág. 9>

No caso de Leon, vimos que, após um ano, seu saldo na poupança deverá ser de R$ 2.120,00. Porém, se quisermos calcular o valor corrigido ao final do segundo ano, o processo irá se repetir – mas com um detalhe muito importante: não iremos mais calcular 6% de 2.000 reais, pois a taxa da poupança incidirá

sobre o saldo corrigido, ou seja, 2.120 reais.

Assim, Leon terá R$ 2.120,00 mais 6% de R$ 2.120,00. Como 6% de R$ 2.120,00 = 0,06x2120= 127,20. Ao final do 2º ano, Leon terá 2120 + 127,20 = R$2247,20. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no final do terceiro ano, repetiremos o procedimento, mas desta vez a partir dos R$ 2.247,20 que estavam na caderneta no final do segundo ano. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no quarto ano, tomaremos como base o saldo final do terceiro ano, se quisermos calcular o valor do quinto ano, tomaremos como base o saldo do quarto ano e assim por diante.

Poderíamos descobrir o saldo de Leon no ano seguinte, simplesmente multiplicando-se o saldo do ano anterior por 1,06. Veja como isso é equivalente ao que fizemos anteriormente:

Ao final do 1º ano, o saldo era de 2000 acrescido de 6% de 2000, ou seja, 2000 + 0,06x2000. Essa expressão pode ser escrita da forma 2000x(1+0,06), isto é, 2000x1,06, cujo resultado é o mesmo encontrado anteriormente (2120 reais).

A mesma ideia pode ser aplicada para o 2º ano. Para descobrirmos o novo saldo, basta multiplicarmos 2120 por 1,06, obtendo R$2247,20.

A após n anos? Qual seria o saldo de Leon? Bastaríamos multiplicar o valor inicial de 2000 reais n vezes por 1,06, ou seja, 2000x1,06x1,06x...x1,06 = 2000x1,06n. No caso geral, um valor C aplicado por um tempo n a uma taxa de juros compostos i por unidade de tempo acumulará um montante M dado pela fórmula

$M = C.(1+i)^n$

Nesta fórmula, M representa o montante (quantia final após a incidência dos juros), C é o capital (dinheiro) e a taxa de juros é representada pela letra i (vamos sempre utilizar na forma de número decimal). O tempo de investimento é representado pela letra n.

Vamos vê-la funcionando?

O capital investido por Leon foi de 2.000 reais e a taxa de juros ao ano foi de 6% = 0,06. O tempo de investimento será de 5 anos.

Dessa forma, temos os seguintes dados:

C = ________________________

i = __________________________

n = ________________________

Aplicando na fórmula, temos:

$M = 2000 \,.\, (1+0{,}06)^5$

(Vamos utilizar uma calculadora para facilitar na hora dos cálculos, ok?)

$M = 2000 \,.\, 1{,}06^5 = 2000 \,.\, 1{,}33822 = 2676{,}44$

Com isso, temos:

Viu?! Não é tão difícil! Podemos notar que, neste problema, o valor do

montante depende claramente da taxa de juros aplicada, porém, mais importante que isso, da forma como essa taxa incide ao longo do tempo. Como o cálculo de juros de um mês leva em consideração o valor que incorpora os juros do mês anterior, acaba acontecendo um aumento do estilo "bola de neve", um acúmulo recursivo, o que, matematicamente, pode ser modelado pela exponenciação. Por isso, na fórmula que apresentamos, o tempo – representado pela variável n – é um expoente. É importante

destacar que os juros compostos também são usados para calcular dívidas, como as do cartão de crédito e do cheque especial. O crescimento exponencial dessas dívidas, sempre calculadas sobre o valor atualizado e nunca sobre o valor original, termina surpreendendo os usuários que, de um mês para outro, passam a dever mais do que conseguem pagar. Olho vivo, portanto!

No exemplo anterior, vimos uma situação-problema de crescimento exponencial (o saldo de Leon aumentava com o tempo segundo uma lei que

apresenta variável no expoente). Porém, existem situações que apresentam decrescimento exponencial. Veja o seguinte exemplo:

Em um campeonato com 64 clubes, em cada rodada, dois times se enfrentam e o perdedor é eliminado. Dessa forma, passam para a próxima etapa sempre a metade do número de clubes. Quantas rodadas são necessárias para que reste um único clube que receberá o troféu de campeão?

Vamos relacionar o número de clubes ao número de rodadas do campeonato através de uma tabela.

Rodada	Número de clubes
Início do campeonato (0 rodadas)	64
após 1 rodada	32
após 2 rodadas	16
após 3 rodadas	8
após 4 rodadas	4
após 5 rodadas	2
após 6 rodadas	1

A tabela nos mostra que após 6 rodadas teríamos definido o campeão desse torneio. Obtemos o número de

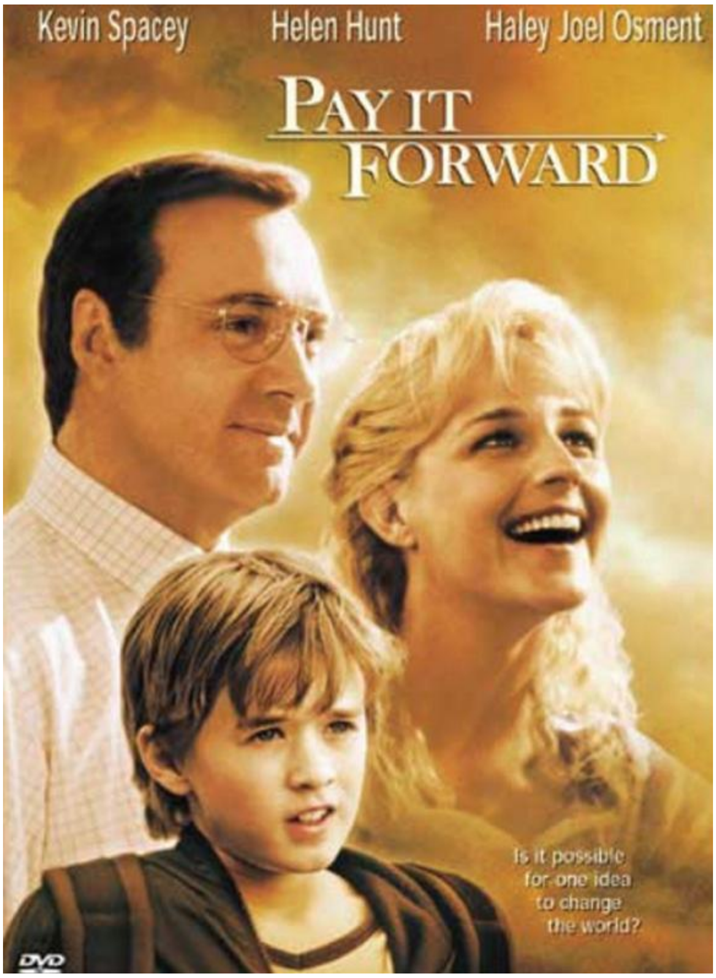
<pág. 11>

clubes para a próxima rodada multiplicando o número de clubes da rodada anterior por 1/2.

Outro caso em que podemos aplicar a função exponencial é inspirado em um filme: *A Corrente do Bem* (*Pay It Forward*, 2000). Este filme conta a história de um menino,

Trevor McKinney, que, incentivado por um desafio de seu professor de Estudos Sociais, cria um jogo chamado *A Corrente do Bem*.

Veja o pôster do filme:



Multimídia

Para assistir ao trailer do

filme *A Corrente do Bem*, acesse http://mais.uol.com.br/view/57032.

****

A Corrente do Bem **relata a história de alguém que ajuda três pessoas a realizar algo muito importante, mas que elas não podem fazer sozinhas. Em gratidão, a pessoa auxiliada deve retribuir a gentileza para outras três pessoas, que, por suas vezes, devem continuar retribuindo da mesma forma, infinitamente...**

Vale muito a pena assistir a este filme. Mas também vale muito a pena perceber como essa corrente propaga-se rapidamente! Vejamos:

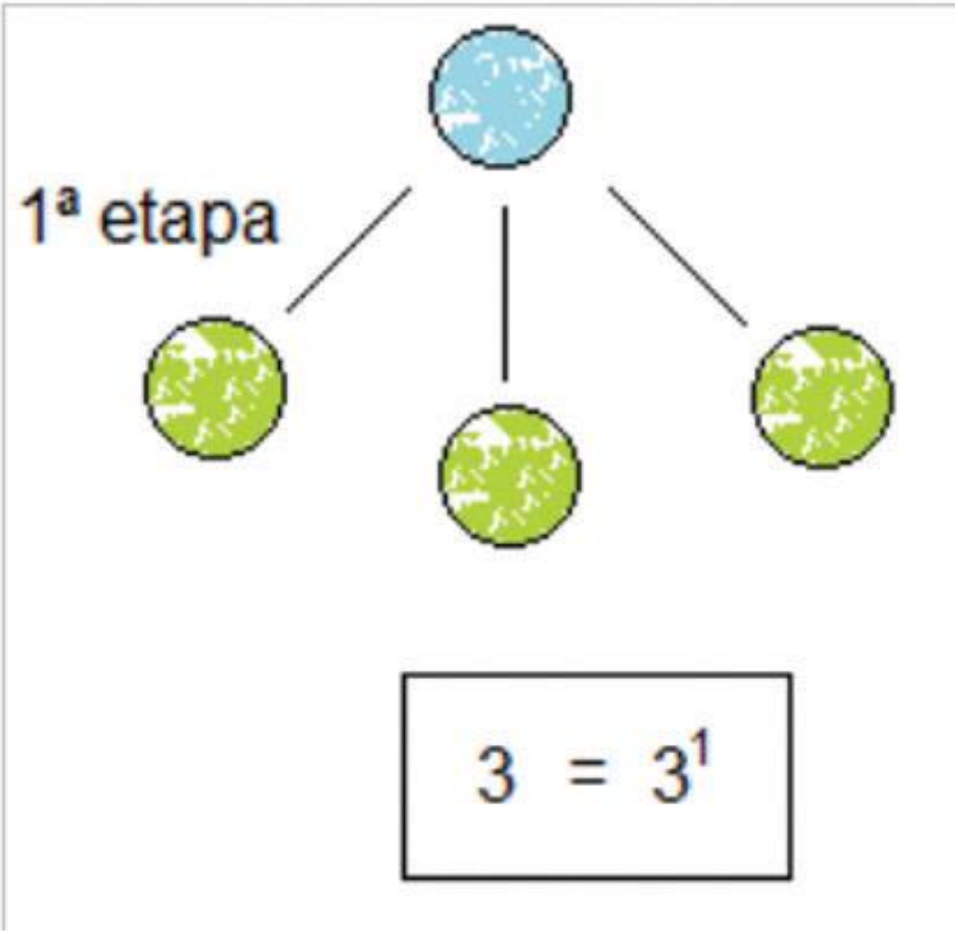
1ª etapa: Uma pessoa presta auxílio para outras três.

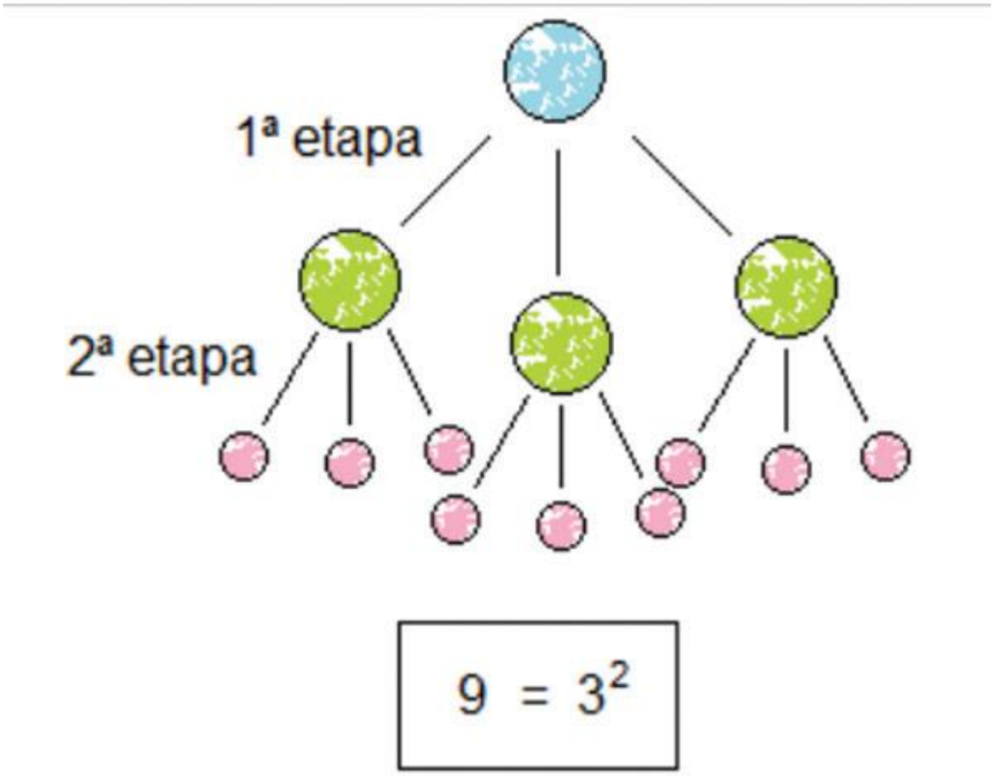
2ª etapa: Cada uma dessas três pessoas auxiliam outras três. Com isso, 3x3 = 9.12

3ª etapa: Cada um dos 9 auxiliados da etapa anterior auxilia outras três pessoas. Isto é, 9 x 3 = 27.

E assim por diante.

Resumindo, nós teremos a seguinte configuração:


1ª etapa
$3 = 3^1$


1ª etapa
2ª etapa
$9 = 3^2$

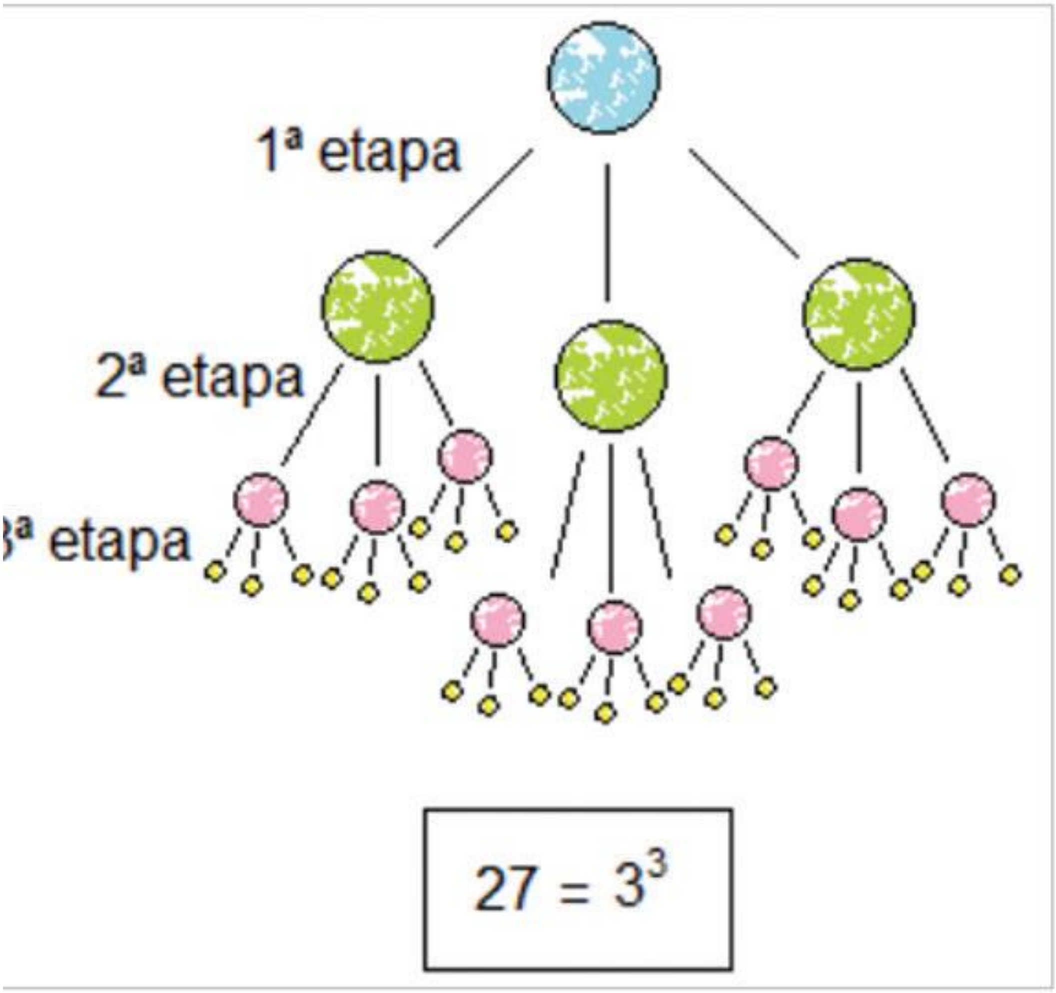


Figura 1: Podemos notar que na Corrente do Bem o número de pessoas auxiliadas a cada etapa aumenta rapidamente. Além disso, a quantidade de pessoas é sempre uma potência de 3.

Fonte: do autor

Vamos verificar essa situação, colocando as informações em uma tabela:

Etapa	Nº. de pessoas auxiliadas 3nesta etapa
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
4	$3^4 = 81$
5	...
...	$3^2 = 59.049$
n	...

Observe que o número de pessoas auxiliadas é igual a 3 elevado ao número da etapa. Dessa forma, numa etapa n qualquer teremos 3n pessoas ajudadas.

Sendo assim:

<pág. 13>

Atividade 3

Quantas pessoas serão auxiliadas na 7ª etapa da Corrente do Bem?

****

Atividade 4

Em uma etapa da Corrente do Bem foram auxiliadas 729 pessoas. Em que etapa isso ocorreu?

Escreva a equação que representa o problema e resolva-a.

****

Atividade 5

Um casal resolveu encontrar uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Então, seguiram esta linha de raciocínio:

	Número de membros da geração
1ª geração: casal	$2 = 2^1$
(2 pais e 2 mães)	$4 = 2^2$
3ª geração: avôs + avós (4 avôs e 4 avós)	$8 = 2^3$

a. Qual o número de membros da 6ª geração?

b. Qual o número de membros da geração de número n?

c. Escreva a função exponencial que descreve o problema.

d. Em qual geração teremos 2.048 membros?

******

<pág. 14>

Atividade 6

A atividade anterior nos dá uma dica de como devemos resolver as equações exponenciais, que são equações que apresentam incógnita no expoente. Uma dica para resolver equações desse tipo é tentar escrever ambos os membros da equação como potências de mesma base. Para isso, usamos as propriedades das potências. Veja o seguinte exemplo:

Ex: Resolva, em ℝ, a equação 3x = 81.

Como 81 = 34, temos 3x = 34. Desse modo, x = 4 é a solução dessa equação.

Agora é sua vez, resolva em ℝ, as seguintes equações:

a. 2x = 256

b. 5x = 125

c. 5.4x = 80

d. 5.2x – 3.2x = 32

******

Os exemplos apresentados até o momento relacionavam duas grandezas por uma expressão que apresenta variável no expoente. Definimos, então, a função exponencial:

Definição: Chama-se função exponencial toda função f de variável real dada por f(x)= ax, em que a é um número real dado, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Este número a é chamado de base.

Inicialmente, você poderia pensar: Mas por que o a tem de ser positivo e diferente de 1? A resposta a esta pergunta seria:

.Primeiro que, se $a < 0$, nem sempre a expressão ax

representaria um número real. Por exemplo, se a=-5 e x= 1/2 , o número $(-5)^{1/2}$ = √-5não é real.

.Se a=0, teríamos:

Quando x > 0, y = 0x = 0 – Função constante.

Quando x < 0, não se define 0x (por exemplo,

$$0^{-6} = \frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$$

Quando x = 0, y = 00. Indeterminado.

.Se a = 1, para todo x R, a função dada por y = 1x = 1 é uma função constante.

<pág. 15>

Por estes motivos, apenas utilizamos em nossa definição $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, a função exponencial só assume valores reais positivos. Dessa forma, o conjunto-imagem dessa função é R^*_+

Seção 2
Analisando gráficos

Uma parte importante no estudo de funções é o estudo e análise de seus respectivos gráficos. Como no momento estamos trabalhando com funções exponenciais, vamos construir dois gráficos e retirar algumas conclusões?

Construiremos os gráficos a seguir, localizando alguns pontos e ligando-os:

A primeira função cujo gráfico vamos traçar é a função y = 2x. Vamos fazer uns cálculos?

Para x = – 3, temos

$$y = 2^{-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$$

Para x = – 2, temos

$$y = 2^{-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$$

Para x = – 1, temos

$$y = 2^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$$

Para x = 0, temos $y = 2^0 = 1$
Para x = 1, temos $y = 2^1 = 2$
Para x = 2, temos $y = 2^2 = 4$
Para x = 3, temos $y = 2^3 = 8$

E, ligando os pontos, temos o seguinte gráfico:

<pág. 16>

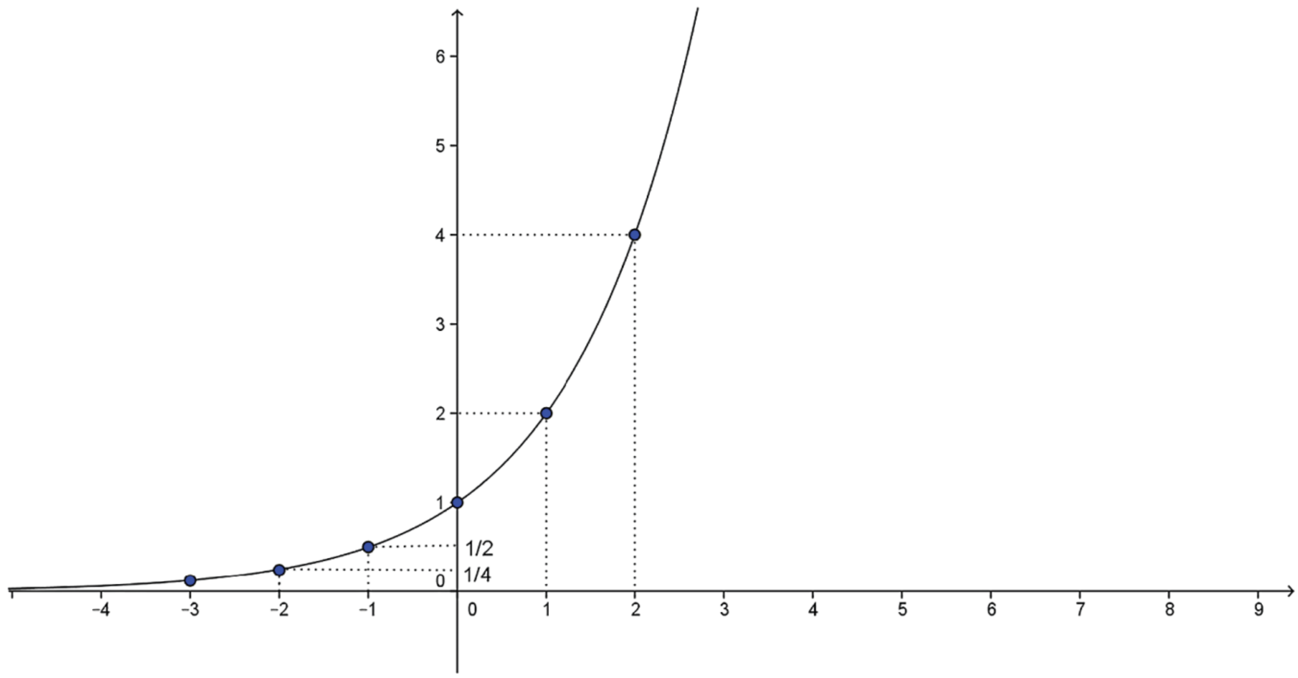


Gráfico 1: y = 2x. Este gráfico foi feito por um

computador. Podemos perceber que, à medida que os valores de x vão crescendo, o valor de y também cresce rapidamente. Essa função é crescente!

Vamos desenhar o gráfico de uma outra função, Faremos mais uns cálculos!

Para x = – 3, temos y = 2^3 = 8

Para x = – 2, temos y = 2^2 = 4

Para x = – 1, temos y = 2

Para x = 0, temos y = = 1

Para x = 1, temos y ==

Para x = 2, temos y ==

Para x = 3, temos y = =

<pág. 17>

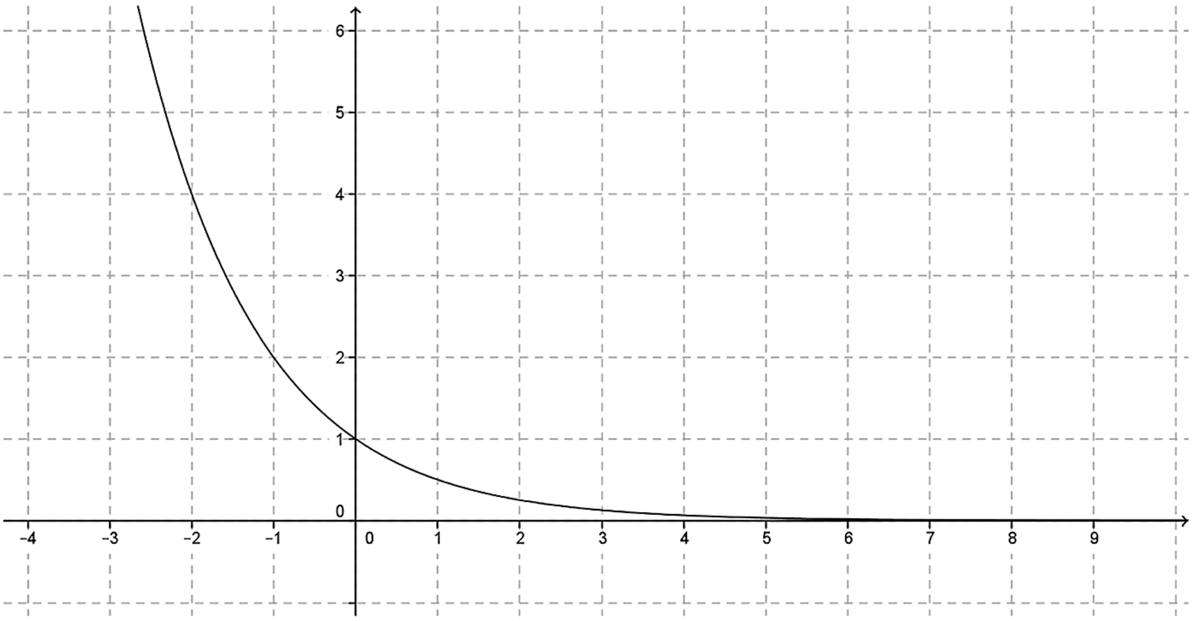


Gráfico 2: $y = \frac{1}{2}^{2}$.

Este gráfico também foi feito por um computador. Podemos perceber da mesma forma que, à medida que os valores de x crescem, o valor de y vai

caindo (a função é decrescente) rapidamente.

Vocês perceberam que, apesar de a primeira função ser crescente e a segunda ser decrescente, as duas curvas passam pelo ponto (0, 1)? Vocês saberiam explicar por qual motivo isso ocorre? É simples! Uma das propriedades de potências é que qualquer número (diferente de zero) elevado a zero é sempre igual a 1.

Outra propriedade interessante: vocês saberiam dizer o que faz com que a primeira função seja crescente e a segunda decrescente? Vou dar uma

dica: as funções y=27x, *y*=516*x* e *y*=0,1*x* são todas decrescentes. Já as funções $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{113}{9}\right)^x$ e

$y = (11)^x$ são todas crescentes. Descobriu? Muito bem: se o número elevado ao expoente for maior que 1, a função será crescente. Já se este número estiver entre 0 e 1, a função será decrescente. Os motivos de ter falado "entre 0 e 1" e não "menor que 1", como seria de se esperar, ficarão mais claros a seguir.

Importante

Acesse o endereço (http://www.igm.mat.br/profweb/sala_de_aula/mat_computacional/alunos/neru/exponencial_1.htm) e, no applet que surgirá, faça variar o valor do número que será elevado ao expoente – no caso, chamado de “a”. O que acontece quando ele é igual a 1?

****

Importante

Os dois gráficos que traçamos permitem-nos

perceber, de maneira mais informal, o que seriam funções crescentes (à medida que x aumenta, y aumenta) e decrescentes (à medida que x aumenta, y diminui). Mais formalmente, uma função é dita crescente quando para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$. E dizemos que uma função é decrescente quando, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

****

Resumo

.A função exponencial pode modelar situações importantes da nossa vida, como o cálculo de juros compostos e alguns tipos de crescimento populacional.

.Uma equação exponencial simples pode ser facilmente solucionada por meio da comparação entre as bases e os expoentes.

.Uma função exponencial possui um domínio real, porém um contradomínio real positivo. Além disso, a base deve ser positiva e, ao mesmo tempo, diferente de 1.

.Os gráficos de uma função exponencial podem ser crescentes se a base da função for maior que 1 ou decrescentes se a base estiver entre 0 e 1.

Veja ainda

Para quem gosta de brincar com números, visite o *blog* Matemática na Veia em http://matematica-na-veia. blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html

Neste *site*, há uma discussão muito interessante sobre o uso das potências nos calendários e

muitos outros truques divertidos que envolvem as potências. Divirtam-se!

Referências

.http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html. Acesso em: 10 jul. 2012.

.ZAGO, Glaciete Jardim; Walter AntonioSciani. Exponencial e Logaritmos. 2ª ed. São Paulo: Érika. Estude e Use, 1996. 95p.

<pág. 21>

O que perguntam por aí?

Unesp – 2002

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático

$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 <= t <= T$. O tempo, em segundos, em

que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi

a. 1

b. 2

c. 4

d. 8

e. 10

Resposta correta: Letra E.

O instante t = 0 é o momento em que o golfinho saiu da água, e o instante t = T é o exato momento em que o golfinho retorna à água. Nesses dois momentos, a altura do golfinho em relação ao nível da água é igual a zero, pois não está nem sob e nem

sobre a água. Com isso, temos que:

$4t - t.2^{0,2t} = 0$

$t.(4 - 2^{0,2t}) = 0$

Temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: t=0 (Já esperávamos por essa possibilidade, pois é o momento inicial em que o golfinho sai da água para efetuar o salto.)

2ª possibilidade:

$4t - 2^{0,2t} = 0$

<pág. 22>

Assim, $2^{0,2t} = 4$

$2^{0,2t} = 2^2$

Logo, $0,2t = 2$

Então, segundos . $t = \frac{2}{0,2} =$
10 segundos

<pág. 23>

Caia na rede!

Assista ao vídeo Você Sabia 3.0? Este vídeo mostra curiosidades sobre o mundo exponencial em quem vivemos.

Acesse o *link* abaixo e desfrute!

http://www.youtube.com/watch?v=xKps5DBJEJ4&feature=player_embedded#!

<pág. 24>

Respostas das atividades

Atividade 1

O valor de 2% pode ser representado pelo número decimal 0,02. Com isso, podemos efetuar o seguinte cálculo para determinarmos o valor da multa:

400 x 0,02 = 8 reais.

Logo, o valor total a pagar é: 400 + 8 = 408 reais.

Atividade 2

Efetuamos o produto 2.000 x 0,06 = 120 reais.

Adicionando os juros aos 2.000 reais iniciais, Leon terá 2.120 reais.

Atividade 3

A função que descreve a Corrente do Bem é $y = 3^x$, onde y representa a quantidade de pessoas auxiliadas por etapa e x representa as etapas.

Com isso, na 7ª etapa, teremos x = 7. Logo, $y = 3^7 = 2.187$ pessoas.

Atividade 4

Neste caso, temos que y = 729. Sendo assim, $3^x = 729$. Sabemos, através da fatoração, que $729 = 3^6$.

Com isso, $3^x = 3^6$. Concluímos, portanto, que $x = 6$ (6ª etapa).

Atividade 5

Eles perceberam que a lei de formação do número de membros da geração (y) em função do número da geração (x) era: $y = 2^x$.

Poderíamos fazer perguntas do tipo: Em qual geração o número de ascendentes que o casal teve corresponde a 2048?

ara resolver este problema, bastaria descobrir x tal que
$2^x = 2048$. Este tipo de

equação que apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências é o que chamamos de equação exponencial.

Vamos ver agora como resolver uma equação exponencial. Bem, um método que utilizamos para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de uma mesma base a ($0 < a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

<pág. 25>

$$a = a^{x1} = a^{x2} \Rightarrow x_1 \Rightarrow x_2$$

Quando podemos aplicar isso, a equação exponencial é facilmente reduzida, ou seja, informalmente falando, basta colocarmos as potências na mesma base, pois, se as bases forem iguais, para que as potências sejam iguais, basta que os expoentes sejam iguais. No exemplo das gerações, onde tínhamos que resolver a equação $2^x = 2048$, agora fica bem simples, pois para colocar as potências na

mesma base basta escrevermos 2048 na base 2, mas como? Basta fatorar o 2048! Observe:

2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	2

Daí, temos que $2^x = 2^{11}$. Pelo método que

comentamos anteriormente, concluímos que x = 11 e, portanto, 2048 corresponde a 11ª geração.

Atividade 6

a. $2x = 256 \rightarrow 2x = 28 \rightarrow x = 8$

b. $5x = 125 \rightarrow 5x = 53 \rightarrow x = 3$

c. $5.4x = 80 \rightarrow 4x = 80/5 \rightarrow 4x = 16 \rightarrow 4x = 42 \rightarrow x = 2$

d. $5.2x - 3.2x = 32 \rightarrow 2.2x = 32 \rightarrow 2x+1 = 25 \rightarrow x+1 = 5 \rightarrow x = 4$